Materiały wzorcowe z obszaru matematyki dla nauczyciela uczącego w klasach IV-VIII opracowane w ramach projektu: "Szkoła ćwiczeń Galileo w Nakonowie”, nr POWR.02.10.00-00-3005/19, realizowanego w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

# *Kilka myśli o „geometrii punktów kratowych” i inne refleksje nad dydaktyką matematyki*

**Autor: Jacek Człapiński**

Biuro projektu: **Ogólnopolski Operator Oświaty**
ul. Jana Gorczyczewskiego 2/7; 60-554 Poznań
tel. 61 843 63 04; mail: biuro@operator.edu.pl

Spis treści

*NOWE WYZWANIA W KSZTAŁCENIU MATEMATYCZNYM UCZNIÓW NA POZIOMIE SZKOŁY PODSTAWOWEJ, CZYLI*

# O CO CHODZI Z „GEOMETRIĄ PUNKTÓW KRATOWYCH”?

Koncepcja nauczania geometrii na przestrzeni ostatnich pięćdziesięciu lat podlegała istotnym zmianom, co niestety odbiło się negatywnie zarówno na poziomie kompetencji matematycznych absolwentów polskich szkół, jak i na profilu zawodowym nauczycieli tego przedmiotu. Próby algebraizacji i sprowadzenia obiektów geometrycznych do podzbiorów określonych struktur – nieudolne i szkodliwe – odbiły się negatywnie na budowaniu intuicji geometrycznej. Tę dziedzinę matematyki, której sama nazwa ma swój źródłosłów w praktycznym zastosowaniu do mierzenia rzeczywistych obiektów, próbowano wtłoczyć w algebraiczne reguły grup, pierścieni i składania przekształceń, w całkowitym niemal oderwaniu od cyrkla i linijki. Na efekty nie trzeba było długo czekać – odejście od geometrii syntetycznej, od geometrii cyrkla i linijki, doprowadziło do prawdziwej zapaści w tym obszarze. Widać to najlepiej w podejściu do konstrukcji geometrycznych, które zniknęły z zapisów podstawy programowej już wiele lat temu, a w chwili obecnej zostały zredukowane jedynie do apeli autorów podstawy programowej, aby o konstrukcjach geometrycznych nie zapominać.

Tymczasem w formułowaniu wymagań szczegółowych, czyli tych zapisów, które są obowiązujące tak dla nauczycieli, jak i dla autorów podręczników, haseł odnoszących się do klasycznych konstrukcji geometrycznych po prostu brakuje. Swoistym apelem jest komentarz do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego, gdzie czytamy chociażby: „z zakresu szkoły podstawowej wyeliminowano konstrukcje geometryczne. Ograniczona ilość czasu na realizację materiału przyczynia się do tego, że nie można wprowadzić pełnych konstrukcji geometrycznych (wraz z dowodzeniem poprawności konstrukcji). Aby uczeń był w stanie samodzielnie dowieść poprawności konstrukcji, musi być najpierw nauczony, czym jest dowód. Ponadto, należałoby wcześniej dok-ładnie wprowadzić geometrię okręgu, w tym okręgi wpisane i opisane na wielokątach tak, aby zadania konstrukcyjne nie ograniczały się do kilku przykładów. Wszystkie te czynności zajęłyby jednak bardzo dużo czasu. Z drugiej strony, wprowadzenie konstrukcji geometrycznych bez dowodu poprawności wydaje się dość ryzykowne z dydaktycznego i matematycznego punktu widzenia. Konstrukcje geometryczne będą zatem dokładnie omawiane w szkole ponadpodstawowej".

Myliłby się jednak ten, kto oczekiwałby, że treści te istotnie pojawiają się na poziomie szkół ponadpodstawowych lub chociaż szkół kończących się maturą. Poniżej prezentowany wyciąg z rozporządzenia i komentarz w formie wytycznych do realizacji, pozbawiają niestety złudzeń:

PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU MATEMATYKA

## III etap edukacyjny: 4-letnie liceum ogólnokształcące oraz 5-letnie technikum

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

### Warunki i sposób realizacji

***Planimetria.*** Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają dzięki temu wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, na przykład uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla; można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra.

### Komentarz do podstawy programowej przedmiotu matematyka

Zadania konstrukcyjne zostały opisane w treściach nauczania jako pomoc w nauczaniu geometrii. Tymczasem część nauczycieli bardzo unika takich zadań ze względu na trudności techniczne związane z przedstawieniem rozwiązania na tablicy; inni preferują wykorzystywanie programów komputerowych do konstrukcji. Nie chcąc narzucać ustalonego schematu, twórcy podstawy umieścili zadania konstrukcyjne w warunkach realizacji. Należy zaznaczyć, że punkt VIII. 10 podstawy, mówiący o tym, że uczeń wskazuje szczególne punkty w trójkącie, będzie bardzo trudny w realizacji, jeśli zadania konstrukcyjne zostaną całkowicie pominięte. Zadania konstrukcyjne, których jest wiele, pozwalają uczniom wykazać się umiejętnością znalezienia metody konstruowania, a potem uzasadnić jej poprawność we wszystkich konfiguracjach lub wskazać zmiany w zależności od wzajemnego położenia punktów, prostych itd.

Zatem od strony formalnej nie ma obowiązku kształcenia takich kompetencji, co oznacza, że w całym cyklu kształcenia matematycznego w polskiej szkole uczeń może nie spotkać się z klasyczną geometrią. Autorzy podstawy programowej wskazują, że będzie to krzywdzące dla uczniów. Trudny będzie w realizacji pewien punkt podstawy programowej, ale nie ma obowiązku realizacji tych treści – zachowanie niezrozumiałe i świadczące o tym, że autorami podstawy programowej byli absolwenci polskiej szkoły z czasów, gdy próbowano ją sprowadzić do badania niezmienników grup przekształceń, jak proponował Felix Klein. Jego koncepcja jest co prawda źródłem unifikacji różnych geometrii, ale z pewnością nie było jego zamysłem, aby zamknąć dzieciom (uczniom) drogę do używania cyrkla.

Odejście od geometrii, którą „można zobaczyć”, od jej praktycznego zastosowania, także w mierzeniu obiektów, widać od lat w nauczaniu elementów tzw. geometrii analitycznej, która także stała się ofiarą programu Kleina i to na dwóch płaszczyznach:

- po pierwsze: ogranicza się treści i zawęża zagadnienia, zapominając, że pewne pojęcia i tak są wprowadzane na innych przedmiotach. Dotyczy to między innymi pojęcia „wektora”, którego nie da się wyeliminować z fizyki – zagadnienia, którego „geometryczna definicja”, jako pary punktów, z których jeden jest początkiem, a drugi końcem, jest konstrukcyjnie prosta i intuicyjnie zrozumiała, nawet bez odniesienia do fizycznych zastosowań. Tymczasem termin wyeliminowano z poziomu kształcenia podstawowego w szkołach kończących się maturą, a na poziomie rozszerzonym pozbawiono zasadniczego znaczenia, jako źródła pojęcia kąta. Odbyło się to poprzez wyeliminowanie pojęcia iloczynu skalarnego, czy pojęcia wektora normalnego do prostej,
- po drugie: duża część nauczycieli, którzy podlegali kształceniu w oderwaniu od klasycznej geometrii, rozwiązuje problemy z geometrii analitycznej z pominięciem ich interpretacji na płaszczyźnie wyposażonej w układ współrzędnych. Nie tylko sami unikają rysowania obiektów w układzie współrzędnych, ale wręcz zabraniają uczniom ich zaznaczania (rysowania) w położeniu opisywanym przez dane z zadania. Ci nauczyciele nie dostrzegają tym samym zmian, jakie zaszły na przestrzeni ostatnich lat. W pierwszych latach po wdrożeniu systemu egzaminów zewnętrznych, w ogólnych

zasadach oceniania arkuszy maturalnych z matematyki za rozwiązanie metodą graficzną uczeń nie otrzymywał pełnej liczby punktów (np. przy zadaniu ocenianym na 5 punktów, mógł otrzymać 3 punkty). Oczywiście przez rozwiązanie metodą graficzną należy rozumieć to, co dzisiaj nazywa się w podstawie programowej dla szkoły podstawowej „geometrią punktów kratowych". Tymczasem w ostatnich latach, jeszcze przed wprowadzeniem zmian w podstawie programowej, uznano, że rozwiązania metodą punktów kratowych są uznawane za rozwiązania w pełni poprawne, za które należy przyznać pełną liczbę punktów, odpowiadającą danemu, osiągniętemu przez zdającego, etapowi rozwiązania.

Jakkolwiek obowiązkiem każdego nauczyciela matematyki jest znać podstawę programową dla tego etapu kształcenia, którego naucza, ale także dla etapu następnego i etapu poprzedzającego, to ten obowiązek nie podlega żadnej weryfikacji – są nauczyciele, którzy uczą tego, czego sami byli nauczeni, gdy siedzieli w szkolnych ławkach i którzy nie śledzą zmian w podstawach programowych. Tym samym pomijają treści „nieznane", a takimi są dla dużej części z nich właśnie zagadnienia „geometrii punktów kratowych". I o ile sięgnięcie po nowe podręczniki przez nauczycieli szkół podstawowych powoli oswaja ich z „nowinkami", o tyle nauczyciele szkół ponadpodstawowych nie chcą przyjąć do wiadomości, że pojawiło się „coś nowego", co w niewielkim zakresie przywraca geometrii jej właściwą rolę, której nie da się niczym zastąpić – środowisko kształtowania intuicji matematycznej.

Warto uważnie przeczytać zamieszczone poniżej zapisy podstawy programowej dla szkoły podstawowej. To one stanowią prawną podstawę do realizacji dosyć szerokiego zakresu zagadnień, które na późniejszym etapie kształcenia będą nazwane elementami „geometrii analitycznej".

## PODSTAWA PROGRAMOWA

**Treści nauczania – wymagania szczegółowe**

### KLASY IV-VI

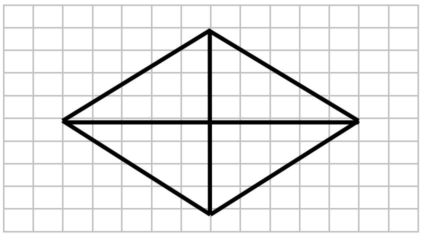
VII. Proste i odcinki. Uczeń:

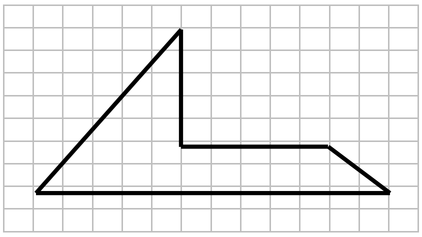
2) rozpoznaje proste i odcinki prostopadłe i równoległe (…),

3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych.

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

4) oblicza pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełnienia do większych wielokątów, jak w sytuacjach:





## Klasy VII i VIII

VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

2) przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe.

X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:

1) znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;
2) rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);
3) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;
4) oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych;
5) dla danych punktów kratowych *A* i *B* znajduje inne punkty kratowe należące do prostej *AB*.

XV. Symetrie. Uczeń:

2) zna i stosuje w zadaniach podstawowe własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta (…).

Treści nauczania w klasach IV–VI ośmioletniej szkoły podstawowej odpowiadają w zasadzie treściom nauczanym dotąd w tychże klasach sześcioletniej szkoły podstawowej. Wprowadzono przy tym kilka rozszerzeń, o których mowa poniżej.

Pojawiają się bardziej złożone przykłady, jak w przypadku obliczania pól figur. Obliczanie pól figur na kratkach nie występowało w poprzedniej podstawie, natomiast doświadczenie uczy, że stanowi ono bardzo dobre przygotowanie uczniów do zrozumienia abstrakcyjnego pojęcia układu współrzędnych. Ponadto daje możliwość wprowadzenia dość różnorodnych zadań na obliczanie pól figur na kratkach poprzez dopełnianie do figur prostszych albo podział na prostsze figury. Takie zadania nie tylko kształtują ogólne myślenie matematyczne, ale również budują intuicję dotyczącą pojęcia pola.

**Trzeba jednak zauważyć, że treści podstawy programowej należy czytać w sposób spójny, a nie wybiórczy.**

Jeżeli w punkcie 6. rozdziału X. rozporządzenie podaje, że uczeń „dla danych punktów kratowych *A* i *B* znajduje inne punkty kratowe należące do prostej *AB*”, to jest to nic innego, jak geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego prostej, z jaką uczniowie spotykają się w szkole ponadpodstawowej, często dopiero po wprowadzeniu pojęcia tangensa kąta, które oczywiście nie jest w ogóle w tym momencie potrzebne. Ale istotniejsze jest, że ten zapis można, a nawet należy czytać razem z punktem 2. rozdziału VIII.: „uczeń przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe”. Tym samym kompetencją, jaką uczeń może, a nawet powinien wynieść ze szkoły podstawowej jest rysowanie w układzie współrzędnych prostej prosto-padłej do danej i przechodzącej przez dany punkt.

# KARTY PRACY DLA UCZNIA

Proponowane niżej zadania są zadaniami „maturalnymi”, które pozwalają kształtować intuicję geometryczną u uczniów także na wcześniejszym etapie edukacyjnym. Sposób prezentacji pozwala sięgnąć po nie jako po karty pracy, a dołączone rozwiązania mogą służyć tym uczniom, którzy samodzielnie podejmą próbę ich rozwiązania, ale trafią na jakąś przeszkodę.

Jakkolwiek niektóre z tych zadań były wykorzystane w trakcie matury z matematyki, bądź ich źródłem są próbne egzaminy maturalne, to trzeba przyznać, że ich rozwiązanie wymaga kompetencji, które są kształcone na poziomie szkoły podstawowej, co ma odzwierciedlenie w dopuszczonych do użytku szkolnego programach i podręcznikach. Wydaje się, że ważne dla rozwiązania części z prezentowanych zadań pojęcie prostopadłości prostych, omawiane w praktyce szkolnej przez znaczną grupę nauczycieli, jest jak dotychczas nieco zaniedbywane przez innych. Jednak celem tego materiału jest przygotować zarówno uczniów, jak i nauczycieli do geometrycznego spojrzenia na obiekty w układzie współrzędnych i pomoc we właściwym ich postrzeganiu.

**KARTA PRACY 1.** [https://zadania.info/d1759/87341]

Punkty $A=(-10,5)$, $B=(-3,-2)$, $C=(-2,-1)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta *ABCD*. Wierzchołek *D* ma współrzędne:

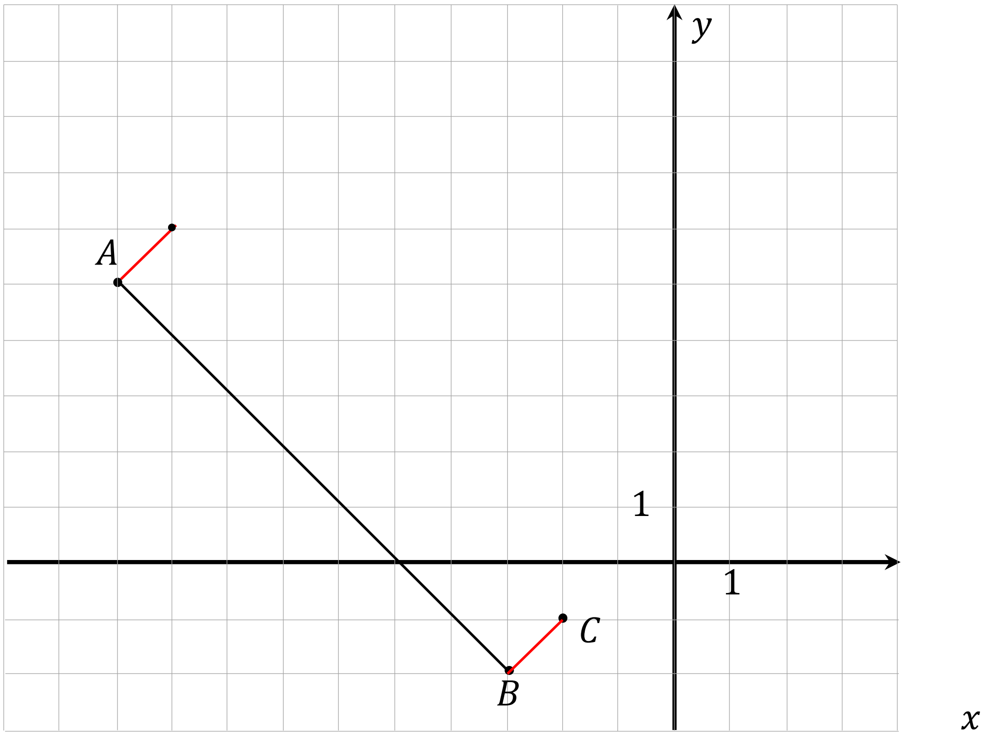
**A.** $(-7,4)$ **B.** $(-9,6)$ **C.** $(-11,7)$ **D.** $(-8,7)$

**KARTA PRACY 1 – ROZWIĄZANIE.**

Punkty $A=(-10,5)$, $B=(-3,-2)$, $C=(-2,-1)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta *ABCD*.

Wierzchołek *D* ma współrzędne:

**A.** $(-7,4)$ **B.** $(-9,6)$ **C.** $(-11,7)$ **D.** $(-8,7)$




Zauważmy, że wzajemne położenie punktów *B* i *C* musi odpowiadać wzajemnemu położeniu punktów *A* i *D*. Zatem odkładamy odcinek *BC* zaznaczony kolorem czerwonym, w taki sposób, aby jego jednym z końców był punkt *A* – oczywiście są dwa takie położenia, ale tylko dla jednego z nich otrzymamy prostokąt.

Tym samym prawidłową odpowiedzią jest oczywiście odpowiedź **B**.

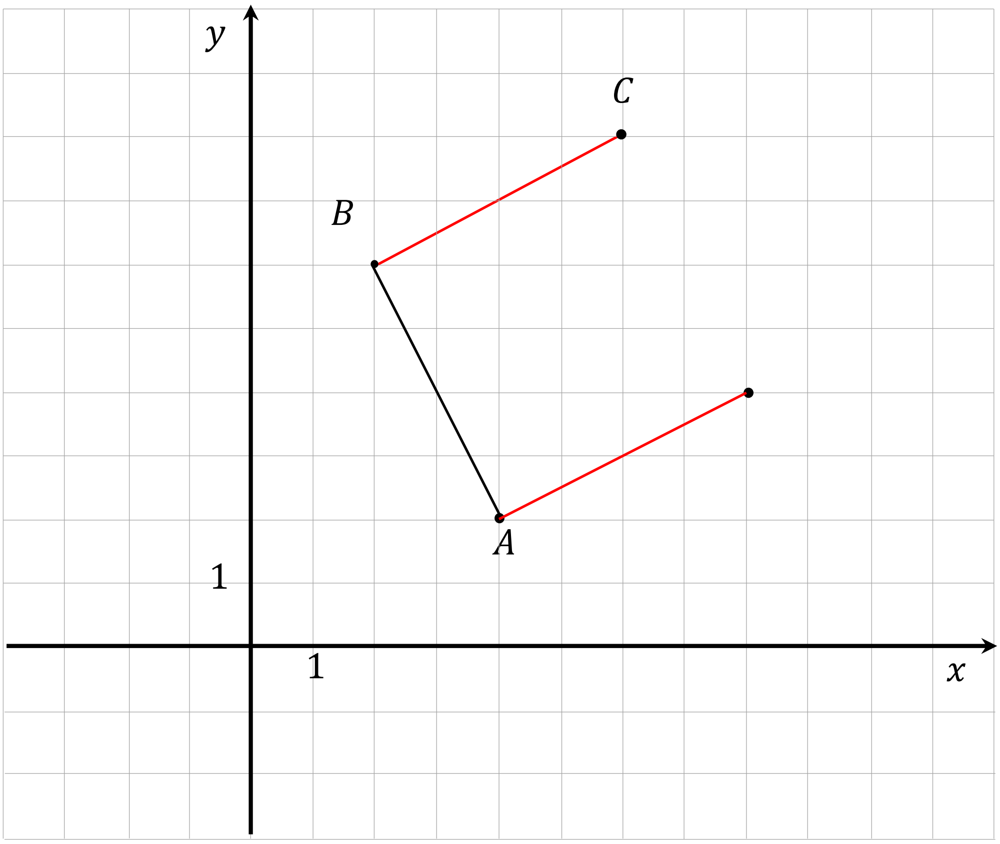
Zauważmy, że zarówno bok *AB*, jak i bok do niego prostopadły, są położone w sposób szczególny – zawierają się w przekątnych kwadratów, których wierzchołki są punktami kratowymi. Jest bardzo ważne, aby uczniowie potrafili automatycznie wskazywać proste prostopadłe w takim położeniu – także wyjaśnienie wzajemnej prostopadłości nie powinno stanowić problemu, gdyż odpowiednie kąty, jakie te boki tworzą z osiami układu współrzędnych, mają miary po $45°$.

**KARTA PRACY 2.**

Punkty $A=(4,2), B=(2,6), C=(6,8)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne wierzchołka *D.*

**KARTA PRACY 2 – ROZWIĄZANIE.**

Punkty $A=(4,2), B=(2,6), C=(6,8)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne wierzchołka *D.*




Zauważmy, że wzajemne położenie punktów *B* i *C* musi odpowiadać wzajemnemu położeniu punktów *A* i *D*. Zatem odkładamy odcinek *BC* zaznaczony kolorem czerwonym, w taki sposób, aby jego jednym z końców był punkt *A* – oczywiście są dwa takie położenia, ale tylko dla jednego z nich otrzymamy kwadrat.

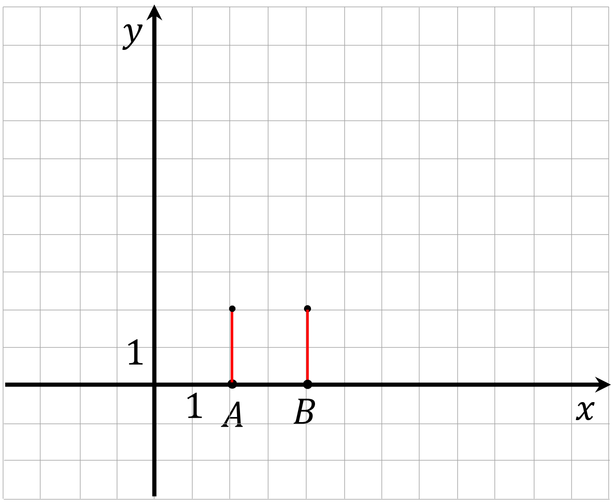
Tym samym czwarty wierzchołek kwadratu ma współrzędne: $D = (8, 4)$.

**KARTA PRACY 3.**

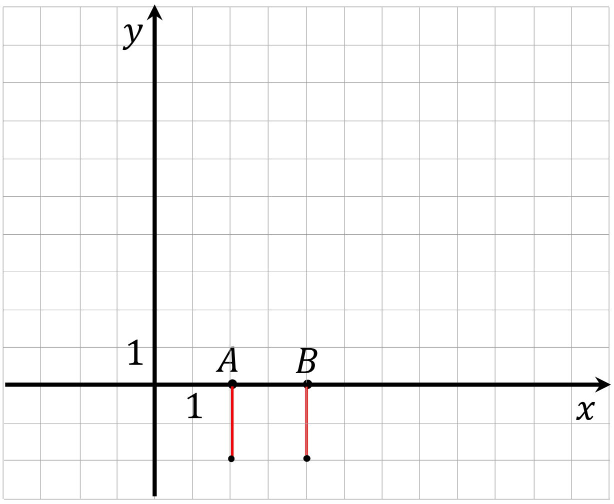
Punkty $A=(0,2), B=(0,4)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

**KARTA PRACY 3 – ROZWIĄZANIE.**

Punkty $A=(0,2), B=(0,4)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.




Zauważmy, że przyjęta umowa oznaczania kolejnych wierzchołków w sposób uporządkowany (przeciwnie do ruchów wskazówek zegara) wyznacza rozwiązanie takie, jak wskazane powyżej, gdzie pozostałymi wierzchołkami są punkty: $C = (4, 2)$ oraz $D = (2, 2)$. Niemniej jednak ważniejsza jest kolejność zapisanych wierzchołków, niż przyjęta orientacja. Dlatego za dopuszczalne należałoby uznać również takie rozwiązanie, jak poniżej.



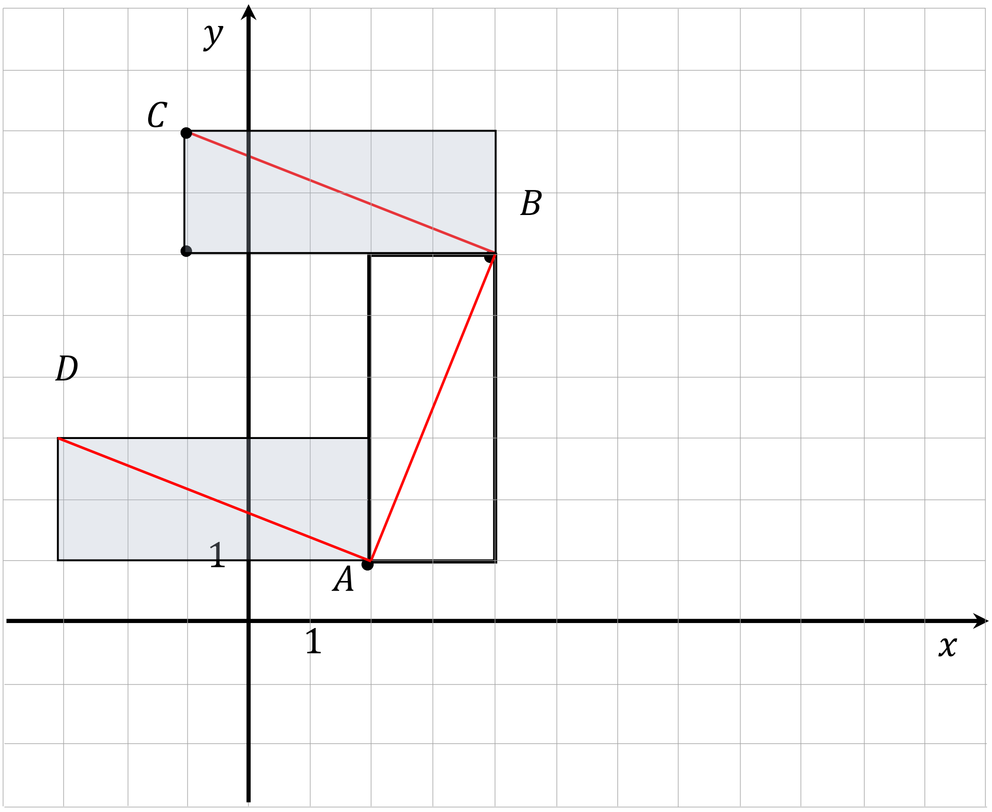

Wtedy pozostałymi wierzchołkami są punkty: $C = (4, -2)$ oraz $D = (2, -2)$.

## KARTA PRACY 4.

Punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 6)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

## KARTA PRACY 4 – ROZWIĄZANIE.

Punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (4, 6)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.




Zauważmy, że końce danego odcinka (boku kwadratu) wyznaczają przekątną prostokąta, którego boki są równoległe do osi układu współrzędnych. Wyznaczenie prostej (odcinka) prostopadłej do danej (do danego odcinka) można zrealizować poprzez obrót tego prostokąta o $90°$ i odpowiednie ułożenie, aby odpowiednie boki leżały na jednej prostej – tak obrócone niebieskie prostokąty pozwalają wyznaczyć szukane wierzchołki. Wtedy prostopadłość odpowiednich prostych (odcinków) wynika bezpośrednio z własności kątów, jakie przekątna prostokąta tworzy odpowiednio z jego dłuższym i jego krótszym bokiem.

Zatem wierzchołkami kwadratu (jeśli przyjmiemy orientację przeciwną do ruchu wskazówek zegara) są punkty: $C = (-1, 8)$ oraz $D = (-3, 3)$.

**KARTA PRACY 5.**

Punkty $A=(4,1)$, $B=(10,5)$ są końcami odcinka *AB*.

a) Wyznacz długość odcinka *AB*.

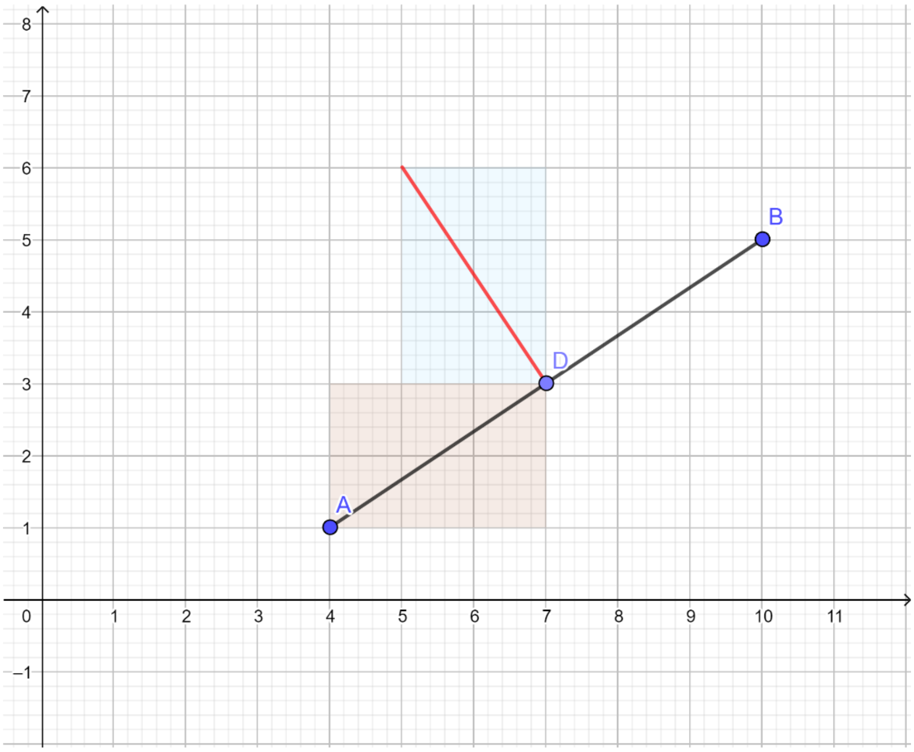
b) Wyznacz współrzędne dowolnego punktu *C* leżącego na symetralnej odcinka *AB*, różnego od środka odcinka i współrzędne punktu, który jest symetryczny do *C* względem prostej *AB*.

**KARTA PRACY 5 – ROZWIĄZANIE.**

Punkty $A=(4,1)$, $B=(10,5)$ są końcami odcinka *AB*.

a) Wyznacz długość odcinka *AB*.

b) Wyznacz współrzędne dowolnego punktu *C* leżącego na symetralnej odcinka *AB*, różnego od środka odcinka i współrzędne punktu, który jest symetryczny do *C* względem prostej *AB*.




Oczywiście, długość odcinka obliczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\ .$$

Wyznaczenie punktu leżącego na symetralnej jest związane z wykorzystaniem jej własności (definicji). Jeśli przyjmiemy, że symetralna to prosta prostopadła do danego odcinka i przechodząca przez jego środek, to musimy ten środek wyznaczyć: $D = (7, 3)$, a następnie zbudować odpowiednie prostokąty, które pozwolą wyznaczyć odcinki (proste) wzajemnie prostopadłe. Takim punktem leżącym na symetralnej (prostopadłej) jest np. punkt $(5, 6)$, a punktem do niego symetrycznym, względem prostej *AB*, jest punkt $(9, 0)$.

**KARTA PRACY 6.**

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A=(4,2), B=(2,6), C=(9,7)$.

a) Oblicz pole trójkąta *ABC*.
b) Oblicz obwód trójkąta *ABC*.
c) Oblicz długość najdłuższej wysokości tego trójkąta.

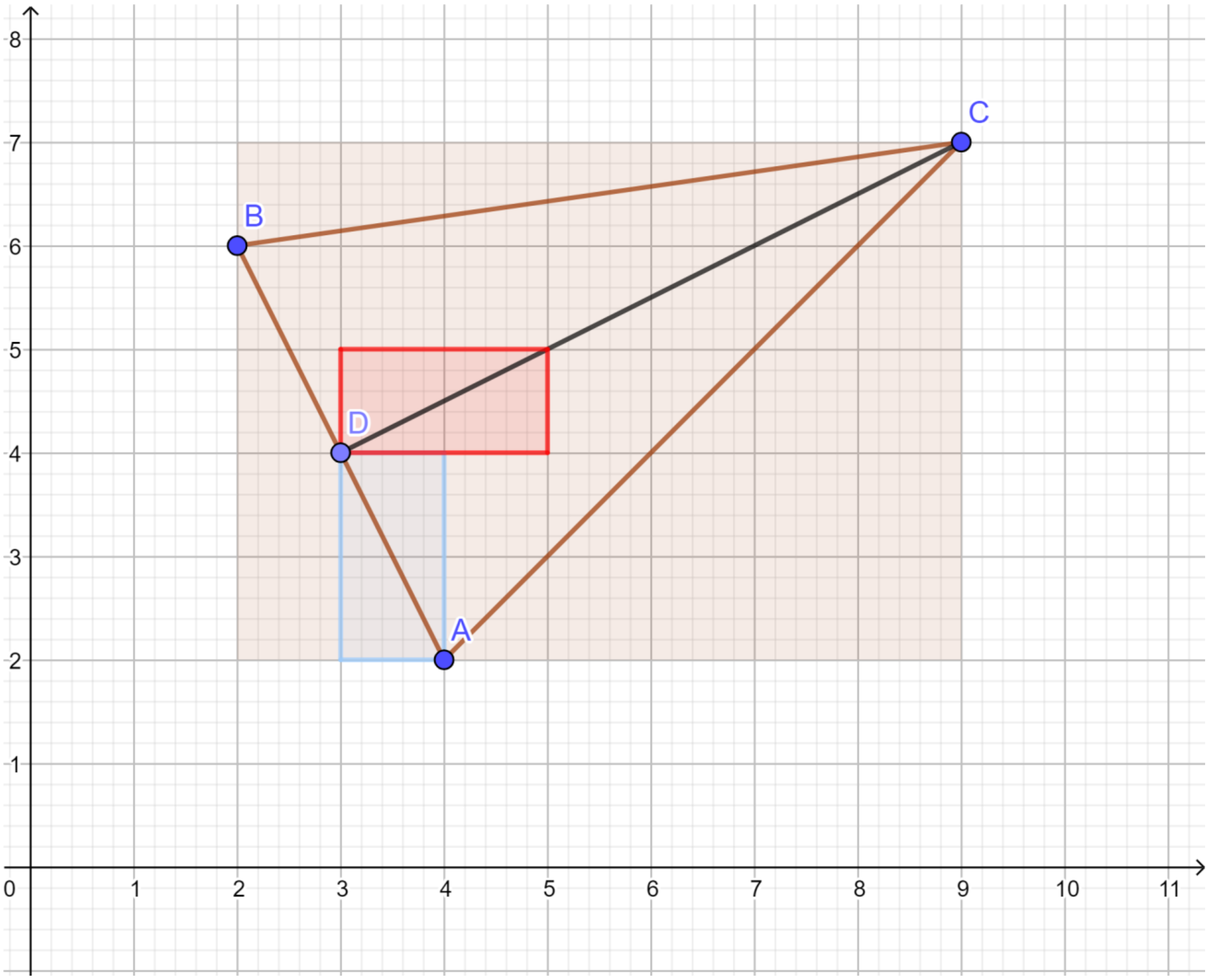
**KARTA PRACY 6 – ROZWIĄZANIE.**

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A=(4,2), B=(2,6), C=(9,7)$.

a) Oblicz pole trójkąta *ABC*.

b) Oblicz obwód trójkąta *ABC*.

c) Oblicz długość najdłuższej wysokości tego trójkąta.




Zauważmy, że pole tego trójkąta można obliczyć przez odpowiednie odjęcie od pola zaznaczonego prostokąta pól trzech trójkątów prostokątnych. Otrzymamy wówczas:

$$P = 5 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 = 35 - 12\frac{1}{2} - 4 - 3\frac{1}{2} = 15.$$

Długość każdego z boków trójkąta wyznaczymy przez zastosowanie twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$|BC| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$|AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Zatem obwód jest równy: $5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$.

Wysokość, jako odcinek prostopadły do podstawy *AB*, została wyznaczona poprzez narysowanie odpowiednich prostokątów, jak w Karcie Pracy 4. Wówczas jej wysokość jest równa: $|CD| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Warto zauważyć, że wysokość można obliczyć, korzystając z obliczonego pola trójkąta i wyznaczonej długości odcinka *AB*. Mamy bowiem: $P = 15 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$.

Stąd $P = 15 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot h$, czyli $h = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

**KARTA PRACY 7.** [Matura, maj 2018].

Punkt $K=(2,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego *KLM*, w którym $|KM|=|LM|$

Odcinek *MN* jest wysokością trójkąta i $N=(4,3)$. Zatem:

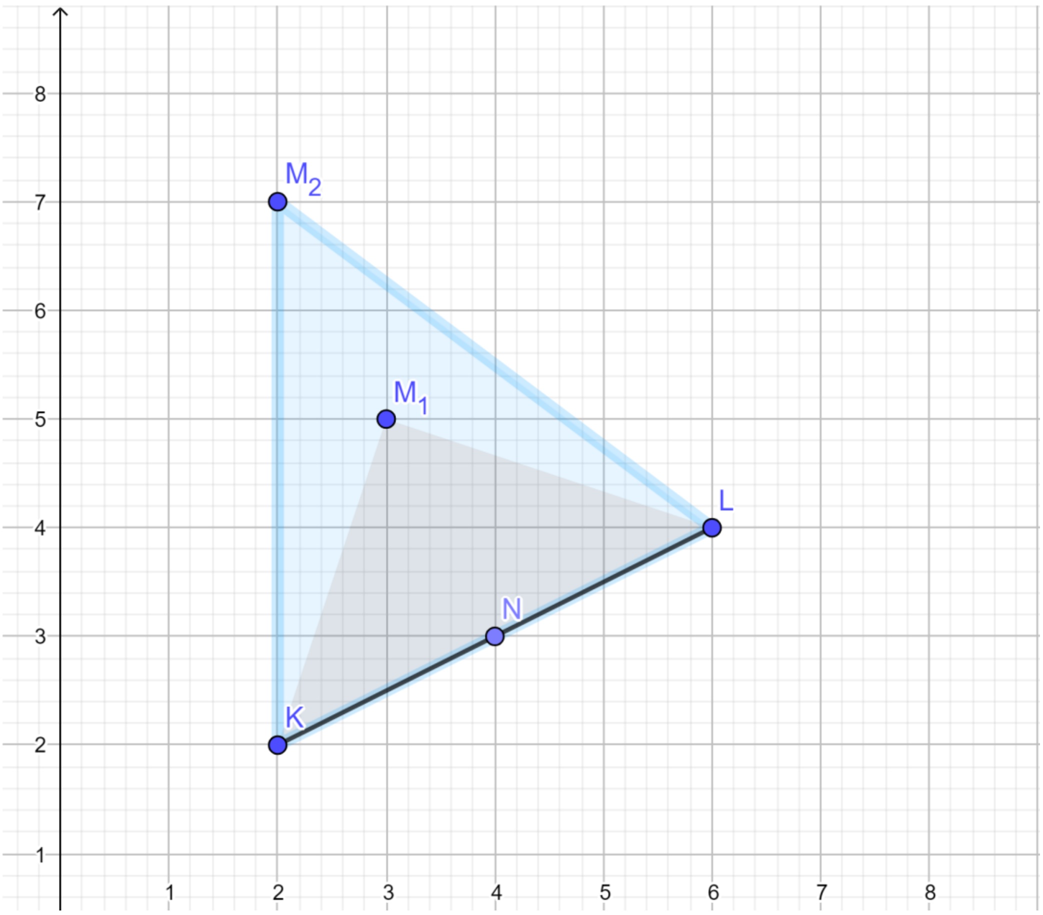
**A.** $L=(5,3)$ **B.** $L=(6,4)$ **C.** $L=(3,5)$ **D.** $L=(4,6)$

**KARTA PRACY 7.** [Matura, maj 2018] – **ROZWIĄZANIE.**

Punkt $K=(2,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego *KLM*, w którym $|KM|=|LM|$

Odcinek *MN* jest wysokością trójkąta i $N=(4,3)$. Zatem:

**A.** $L=(5,3)$ **B.** $L=(6,4)$ **C.** $L=(3,5)$ **D.** $L=(4,6)$




Zauważmy, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów spełniających warunki zadania (nieskończenie wiele położeń punktów *M*, z których dwa przykładowe zaznaczono na rysunku: $M_1$ oraz $M_2$). Ale naszym zadaniem jest jedynie wyznaczyć drugi koniec odcinka, mając dany jeden koniec i mając dany środek tego odcinka. Tym samym jest to „typowe” zadanie z zakresu szkoły podstawowej.

**KARTA PRACY 8.** [Matura rozszerzona, maj 2011].

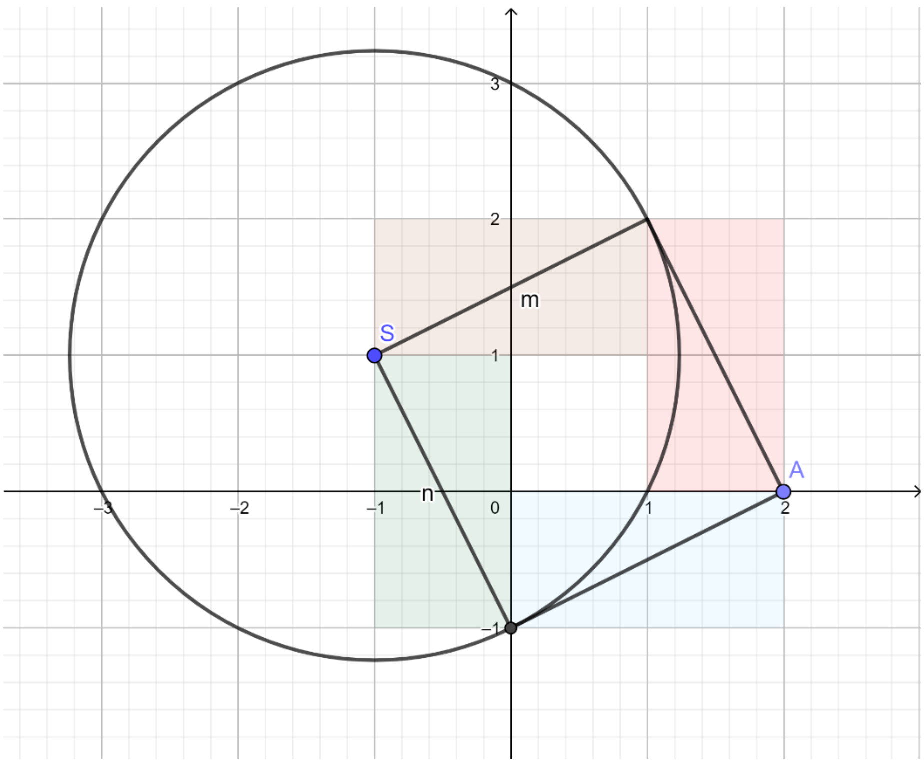
Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu o środku w punkcie $S = (-1, 1)$ i promieniu $\sqrt{5}$, poprowadzonymi przez punkt $A = (2, ,0)$.

**KARTA PRACY 8.** [Matura Rozszerzona, maj 2011] – **ROZWIĄZANIE.**

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu o środku w punkcie $S = (-1, 1)$ i promieniu $\sqrt{5}$, poprowadzonymi przez punkt $A = (2{,}0)$.

Na koniec dwa zadania, które były zadaniami maturalnymi z poziomu rozszerzonego.

W pierwszym z nich, w oryginalnym sformułowaniu, w poleceniu było zapisane równanie okręgu, co wymagało odczytania z tego równania współrzędnych środka i promienia okręgu – w prezentowanej tu wersji te wielkości podano w treści zadania. Warto jednak nadmienić, że odczytanie tych wielkości jest czynnością o charakterze algorytmicznym, o niewielkim stopniu trudności. W istocie rozwiązanie zadania sprowadza się bowiem do badania prostopadłości stycznej do promienia okręgu oraz do świadomości, że przekątna prostokąta o bokach długości odpowiednio 1 i 2 ma długość równą $\sqrt{5}$.




Powyższy rysunek wskazuje, że odcinki stycznych poprowadzone z punktu *A*, jako przekątne odpowiednich prostokątów są wzajemnie prostopadłe, co jest rozwiązaniem zadania.

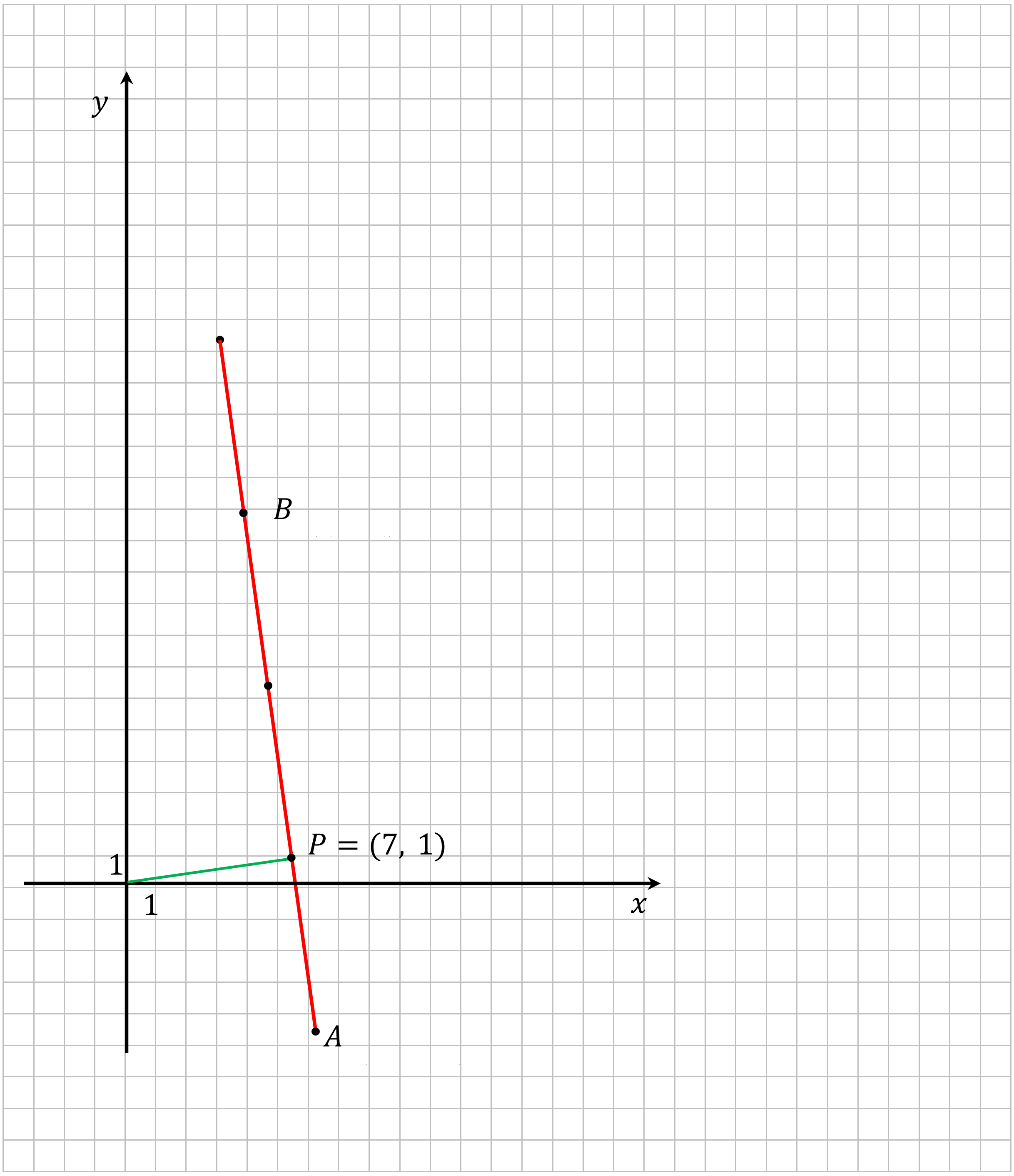
**KARTA PRACY 9.** [Matura Rozszerzona, maj 2021].

Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą $AB$.

Biuro projektu: **Ogólnopolski Operator Oświaty**
ul. Jana Gorczyczewskiego 2/7; 60-554 Poznań
tel. 61 843 63 04; mail: biuro@operator.edu.pl

**KARTA PRACY 9.** [Matura Rozszerzona, maj 2021] – **ROZWIĄZANIE.**

Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą $AB$.



Zaprezentowane rozwiązanie zadania 9 jest dość wiernym odwzorowaniem autentycznego rozwiązania jednego z uczniów przystępujących do matury. Wyraźne zaznaczenie punktów kratowych leżących na prostej $AB$ oraz zaznaczenie odcinka o końcach w początku układu współrzędnych i punkcie $P$ pozwala stwierdzić, że prezentowane w układzie współ-rzędnych obiekty nie są ilustracją do rozwiązania, nie są szkicem, ale stanowią pełne roz-wiązanie, które dokumentuje intuicję i kompetencje zdającego.

# O NAUCZANIU MATEMATYKI SŁÓW KILKA

Proces nauczania/uczenia się musi być skuteczny, a miarą tej skuteczności jest sukces, którego mierniki są z pewnością zdefiniowane nieostro. Wpływ na to ma odbiorca informacji o podejmowanych działaniach: szeroko rozumiane środowisko szkoły, organ prowadzący, dyrektor, rodzic, nauczyciel i wreszcie – uczeń. Każdy z przywołanych podmiotów oczekuje sukcesu w procesie dydaktycznym i do niego dąży, ale każdy inaczej rozkłada akcenty. Ostatnie kilkanaście lat zrewolucjonizowały odbiór informacji o efektywności procesów dydaktycznych, choć można mieć wątpliwości, czy zmiany poszły w dobrym kierunku.

**Presja na wynik egzaminu może generować sytuację, w której gubi się uczniów osiągających wyniki niższe.**

Wprowadzenie systemu egzaminów zewnętrznych i publikowanie skądinąd obiektywnych danych dotyczących gmin, szkół i klas spowodowało, że, zwłaszcza w odbiorze decydentów, sukcesem stało się osiągnięcie średnich wyników wyższych niż inna klasa, inna szkoła, niż średni wynik w kraju, czy gminie. Presja na wynik egzaminu może generować sytuację, w której gubi się uczniów osiągających wyniki niższe.

**Uczenie się matematyki jest dla dziecka ciekawą, intelektualną przygodą, w którą młody człowiek angażuje się bardzo chętnie. Ta naturalna gotowość i zapał giną gdzieś już na początku edukacji formalnej...**

Tymczasem sukces może mieć także inny wymiar – pamiętam mądrego dyrektora szkoły, położonej w tzw. trudnym środowisku, który w dyskusji na temat średnich wyników egzaminów gimnazjalnych stwierdził, że dla niego najważniejsze jest sprawić, aby wszyscy jego uczniowie pojawili się na egzaminie, aby zakodowali arkusz – wszak to był warunek ukończenia szkoły, niezależnie od osiągniętego wyniku. W zaniedbanych środowiskach wykształcenie nie jest wartością, a pojawienie się na egzaminie było być może pierwszą, a być może jedyną sytuacją, w której część tych młodych ludzi nieśmiało podjęło próbę rozwinięcia skrzydeł, aby wzlecieć. A może było przepustką do nowego otoczenia, w którym pojawił się ktoś, kto rozbudził ciekawość poznawczą pasję, kto umiał dać szansę i był w tym skuteczny.

Bo nauczyciel skuteczny, to nie ten, który „wykręci wynik”, ale ten, dzięki któremu uczniowie odkryją radość z zajmowania się określoną dziedziną wiedzy i wcale nie musi to znaczyć, że już na zawsze...

Uczenie się matematyki jest dla dziecka ciekawą, intelektualną przygodą, w którą młody człowiek angażuje się bardzo chętnie, o czym wielokrotnie mówiła dr Elżbieta Gruszczyk-Kolczyńska. Ta naturalna gotowość i zapał giną gdzieś już na początku edukacji formalnej i z pewnością wpływ na to mają odgórnie przygotowywane programy nauczania, których realizacja – podyktowana między innymi stylem pracy nauczyciela – opiera się zazwyczaj na grupie uczniów najlepszych, którzy są aktywni, szybko rozwiązują stawiane problemy, potrafią uogólniać, stawiać i uzasadniać hipotezy. Przy takim stylu pracy program jest realizowany sprawnie, uczniowie najlepsi są odpowiednio stymulowani, ale pozostali nie korzystają w pełni z zajęć, bo tempo jest zbyt szybkie i wszystko wydaje się zbyt trudne.

Można sobie wyobrazić styl pracy, w którym to uczniowie najsłabsi są podmiotami na lekcji matematyki – to do nich nauczyciel kieruje pytania, to ich prosi o rozwiązywanie problemów. Oczywiście wówczas ci bardziej uzdolnieni, a nawet ci sprawniejsi rachunkowo nie korzystają w pełni z lekcji, bo w wielu momentach jest to banalne, nudne i nie rozwija ciekawości poznawczej. Oczywiście rozwiązaniem wcale nie jest przyjęcie modelu pracy z tzw. przeciętnym uczniem – zapewne wówczas rzadziej ci najlepsi będą się nudzić, a ci słabsi rzadziej będą się „wyłączać” i myślami uciekać od tego co się dzieje na lekcjach, ale dalej nie będzie to model pracy nakierowany na każdego ucznia.

**Przy stylu pracy z grupą uczniów najlepszych program jest realizowany sprawnie, uczniowie najlepsi są odpowiednio stymulowani, ale pozostali nie korzystają w pełni z zajęć, bo tempo jest zbyt szybkie i wszystko wydaje się zbyt trudne.**

## KOPETENCJE KLUCZOWE

Zanim zaproponujemy możliwe rozwiązania, przypomnimy to, co o edukacji – w kontekście kompetencji kluczowych – w szczególności o edukacji matematycznej mówią europejskie wytyczne.

Kompetencje kluczowe są definiowane jako połączenie wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji. Kompetencje kluczowe to te, których wszystkie osoby potrzebują do samorealizacji i rozwoju osobistego, bycia aktywnym obywatelem, integracji społecznej i zatrudnienia. Ustanowiono osiem kompetencji kluczowych (Zalecenie Rady, s. 7):

**Kompetencje kluczowe są definiowane jako połączenie wiedzy, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji.**

1) kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
2) kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
3) kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
4) kompetencje cyfrowe,
5) kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
6) kompetencje obywatelskie,
7) kompetencje w zakresie przedsiębiorczości,
8) kompetencje w zakresie świadomości i ekspresji kulturalnej.

Wszystkie kompetencje kluczowe uważane są za jednakowo ważne, ale my skoncentrujemy się tutaj w sposób oczywisty na dwóch z nich.

KOMPETENCJE MATEMATYCZNE I PODSTAWOWE
KOMPETENCJE NAUKOWO-TECHNICZNE

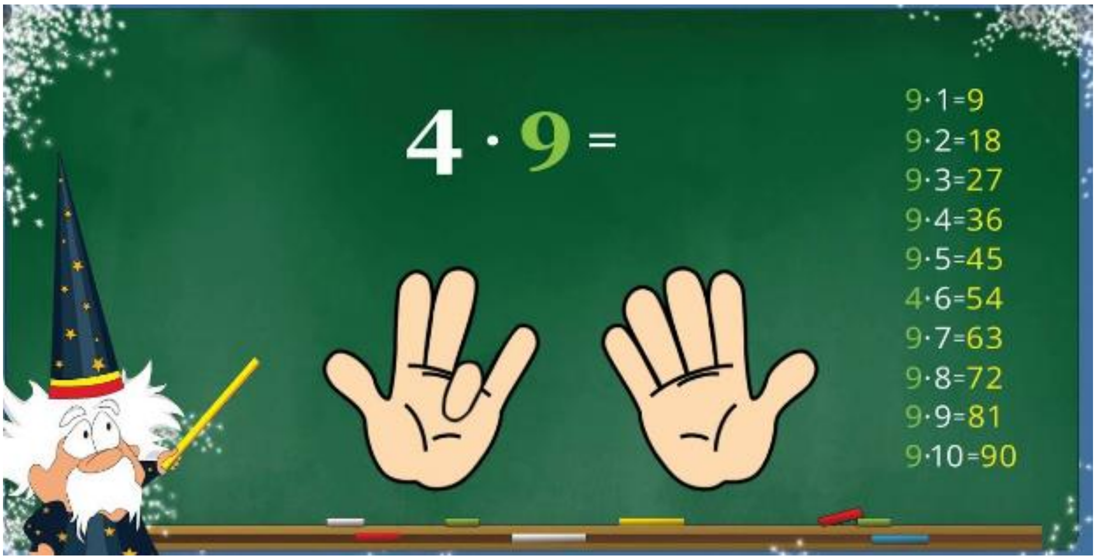
Kompetencje matematyczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji (Zalecenie Rady, s. 9). Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele).

Konieczna wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje solidną umiejętność liczenia, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź.

Uczeń powinien posiadać umiejętności stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i szkolnych, a także śledzenia i oceniania ciągów argumentów. Powinien być w stanie rozumować w matematyczny sposób, rozumieć dowód matematyczny i komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich pomocy. Pozytywna postawa w matematyce opiera się na szacunku dla prawdy i chęci szukania przyczyn oraz oceniania ich zasadności.

**Podkreślić należy raz jeszcze potrzebę należytego opanowania umiejętności liczenia i to niezależnie od zmian, jakie niesie wszechobecna technologia informacyjna.**

Podkreślić należy raz jeszcze potrzebę należytego opanowania umiejętności liczenia i to niezależnie od zmian, jakie niesie wszechobecna technologia informacyjna. Warto mieć tu na uwadze także apele nauczycieli trzeciego etapu edukacyjnego, którzy jako podstawową bolączkę, utrudniającą, a często wręcz uniemożliwiającą właściwą realizację procesu kształcenia wskazują braki w zakresie umiejętności o charakterze rachunkowym – także te dotyczące umiejętności z pierwszych lat kształcenia, począwszy od tabliczki mnożenia, poprzez działania na liczbach o różnych znakach. Dlatego nie można założyć raz na zawsze, że zrealizowanie danego tematu, związanego na przykład ze strategiami mnożenia przez 9, oznacza opanowanie tej umiejętności przez ogół uczniów.




Źródło: https://www.youtube.com/watch?v=D5lYzN2EH1M.

Należy przy każdej nadarzającej się okazji wracać do umiejętności związanych z liczeniem. Taką okazją może być chwila, w której nauczyciel przygotowuje materiały, kiedy uruchamia jakąś aplikację, czy wreszcie moment, który zrodził się na zakończenie lekcji, po zrealizowaniu zaplanowanego tematu – pod ręką mogą być krótkie karty pracy wręczane uczniom lub plakaty, po które szybko sięga nauczyciel. Swoją drogą, można odnieść wrażenie, że nauka „tabliczki mnożenia" jest dzisiaj niemodna. Presja, aby uczniowie opanowali na pamięć, to czego uczyły się całe pokolenia, naraża nauczyciela na zarzuty dotyczące niezrozumienia „ducha czasu" i korzyści, jakie niesie technologia informacyjna. Myślę, że warto wówczas odnieść się do wytycznych Rady Europejskiej, gdzie postulowana jest należycie opanowana umiejętność liczenia, a nie wykorzystania w zastępstwie urządzeń obliczeniowych.

**Należy przy każdej nadarzającej się okazji wracać do umiejętności związanych z liczeniem.**

Nie zmienia to faktu, że z liczenia można zrobić ciekawą zabawę, chociażby poprzez zaproponowanie uczniom, aby znaleźli „niestandardowe" metody wykorzystywane do liczenia, np. takie, jak zaprezentowane na rysunku strategie mnożenia przez 9. Warto zachęcić uczniów, aby wyszukali w Internecie analogiczne algorytmy dotyczące innych działań i jedną z lekcji poświęcić na ich prezentację i zbadanie efektywności (konkurs indywidualny lub zespołowy w zakresie stosowania takich metod).

## UMIEJĘTNOŚĆ UCZENIA SIĘ

„Umiejętność uczenia się" to zdolność konsekwentnego i wytrwałego uczenia się, organizowania własnego procesu uczenia się, w tym poprzez efektywne zarządzanie czasem i informacjami, zarówno indywidualnie, jak i w grupach (Zalecenie Rady, s. 10). Kompetencja ta obejmuje świadomość własnego procesu uczenia się i potrzeb w tym zakresie, identyfikowanie dostępnych możliwości oraz zdolność pokonywania przeszkód w celu osiągnięcia powodzenia w uczeniu się. Kompetencja ta oznacza nabywanie, przetwarzanie i przyswajanie nowej wiedzy i umiejętności, a także poszukiwanie i korzystanie ze wskazówek. Umiejętność uczenia się pozwala rozwinąć zdolności korzystania z wcześniejszych doświadczeń w uczeniu się i ogólnych doświadczeń życiowych w celu wykorzystywania i stosowania wiedzy i umiejętności w różnorodnych kontekstach – w domu, w pracy, a także w edukacji i szkoleniu. Kluczowymi czynnikami w rozwinięciu tej kompetencji u danej osoby są motywacja i wiara we własne możliwości.

Uczniowie powinni być w stanie poświęcać czas na samodzielną naukę charakteryzującą się samodyscypliną, ale również na wspólną pracę w ramach procesu uczenia się, czerpać korzyści z różnorodności grupy oraz dzielić się nabytą wiedzą i umiejętnościami. Powinni być w stanie organizować własny proces uczenia się, ocenić swoją pracę oraz w razie potrzeby szukać rady, informacji i wsparcia.

**Podmiotem procesu dydaktycznego jest oczywiście uczeń, a rolą nauczyciela jest przede wszystkim towarzyszenie uczniowi w procesie zdobywania wiedzy i umiejętności.**

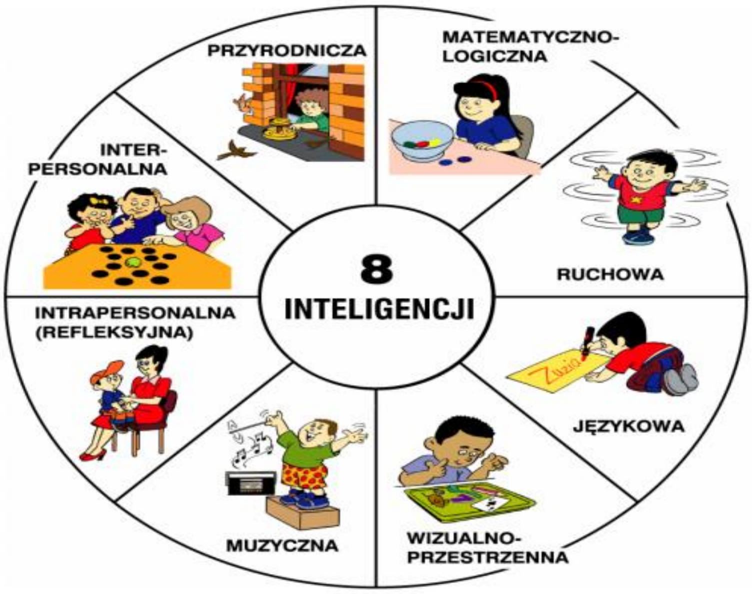
Pozytywna postawa obejmuje motywację i wiarę we własne możliwości w uczeniu się i osiąganiu sukcesów w tym procesie przez całe życie. Chęć wykorzystywania doświadczeń z życia i uczenia się, a także ciekawość w poszukiwaniu możliwości uczenia się i wykorzystywania tego procesu w różnorodnych sytuacjach życiowych to niezbędne elementy pozytywnej postawy.

**Na wczesnych etapach edukacji rośnie rola nauczyciela, jako organizatora procesów nabywania wiedzy i umiejętności, a jego sukcesy, tudzież porażki mają niemal natychmiastowe przełożenie na proces uczenia się młodego człowieka.**

Podmiotem procesu dydaktycznego jest oczywiście uczeń, a rolą nauczyciela jest przede wszystkim towarzyszenie uczniowi w procesie zdobywania wiedzy i umiejętności. Tym sa-mym najważniejszy jest proces uczenia się, nie zaś nauczania. Ale należy pamiętać, że zdobywanie kompetencji trwa przez całe życie, a zdobywanie kompetencji w zakresie umiejętności uczenia się jest najmniej wymierną spośród kompetencji kluczowych i osiąganą w stopniu satysfakcjonującym dopiero na etapie dorosłości. Tym samym, na wczesnych etapach edukacji rośnie rola nauczyciela, jako organizatora procesów nabywania wiedzy i umiejętności, a jego sukcesy, tudzież porażki mają niemal natychmiastowe przełożenie na proces uczenia się młodego człowieka.

**Motywacja i wiara we własne możliwości jest warunkiem koniecznym, aby proces edukacyjny był skuteczny, także w zakresie edukacji matematycznej.**

Akcentowana wyżej motywacja i wiara we własne możliwości jest warunkiem koniecznym, aby proces edukacyjny był skuteczny, także w zakresie edukacji matematycznej. Oczywiście warto wspomnieć teorię inteligencji wielorakiej Howarda Gardnera, która wskazuje, że każdy z nas ma własny, osobisty profil inteligencji, niezależnie od tego ile wynosi jego IQ. Niektórzy ludzie mają profile inteligencji zbliżone do profilu preferowanego przez szkołę, z wysokimi wskaźnikami inteligencji językowej i matematycznej. Inni nad kształtowaniem takiego profilu muszą pracować. W dużym uproszczeniu można stwierdzić, że uczniowie ze słabiej rozwiniętymi profilami inteligencji językowej i matematycznologicznej częściej doświadczają określonych problemów w szkole.




Źródło: http://tiny.pl/g1w4f.

**Nauczyciel może i powinien stworzyć warunki, w których uczeń będzie miał szansę realizować swoje pasje na styku matematyki i obszarów, w których osiąga niewątpliwe sukcesy.**

Ale problemów w szkole doświadczają wszyscy uczniowie, choć ich zakres może być różny. Najczęściej mówiąc o problemach, mamy na myśli osiąganie przez ucznia słabych wyników potwierdzonych w formie oceny szkolnej, niezaliczenia określonej partii materiału czy trudności z otrzymaniem promocji. Ale problemem może być także niechęć do nauki czy unikanie przez ucznia rozwiązywania postawionych przez nauczyciela problemów, bo wydają się zbyt trywialne. Przywołam tutaj przypadek ucznia, który w ramach języka obcego chętnie czytał literaturę, a nawet prosił rodziców o zakup książek w tym języku. Native speaker zwykł mówić, że uczeń ma „niezwykły” akcent, ale to nie mogło istotnie obniżyć motywacji, czy jego ocen szkolnych z przedmiotu. Aż do czasu, gdy zmieniono nauczyciela, który postanowił „przełamać” ucznia i nauczyć go właściwego – w ocenie nauczyciela – akcentowania. Po dwóch ocenach dopuszczających uczeń stracił jakąkolwiek motywację do pracy i przestał czytać literaturę w tym języku. Nauczyciel zabił w nim naturalną ciekawość i pasję.

W kontekście tej teorii najważniejsze jest zatem, żeby spojrzeć w sposób pozytywny na uczniów, którzy zostali oddani pod naszą opiekę – należy pamiętać, że każdy może osiągać sukcesy, także wymierne, wyrażone w skali stopni szkolnych, w określonej dziedzinie. To właśnie zadaniem nauczyciela już na etapie edukacji wczesnoszkolnej jest pomóc odkryć dziecku jego mocne strony i rozwinąć skrzydła w tej dziedzinie. Ale nauczyciel może i powinien stworzyć warunki, w których uczeń będzie miał szansę realizować swoje pasje na styku matematyki i obszarów, w których osiąga niewątpliwe sukcesy. Musi mieć szansę poszukiwać problemów, a później je rozwiązywać. Oczywiście wymagać to będzie przeprojektowania gotowych, dostarczanych przez wydawnictwa scenariuszy i konspektów lekcji, ale warto pamiętać, że podmiotem jest zawsze uczeń, a nie zbiorowość.

Warto na przykład pamiętać, że matematyka w sztuce nie skończyła się wraz odejściem epoki renesansu, ale znalazła nowe, współczesne i niezwykłe obszary ekspresji, co widać między innymi w pracach Mauritsa Eschera. Chociaż trudno od dziesięciolatka, czy dwunastolatka oczekiwać wizji Eschera, to jednak samodzielne odkrywanie symetrii w parkietażach, czyli pokryciach płaszczyzny przystającymi figurami, może być wyzwaniem i okazją do matematycznych odkryć.

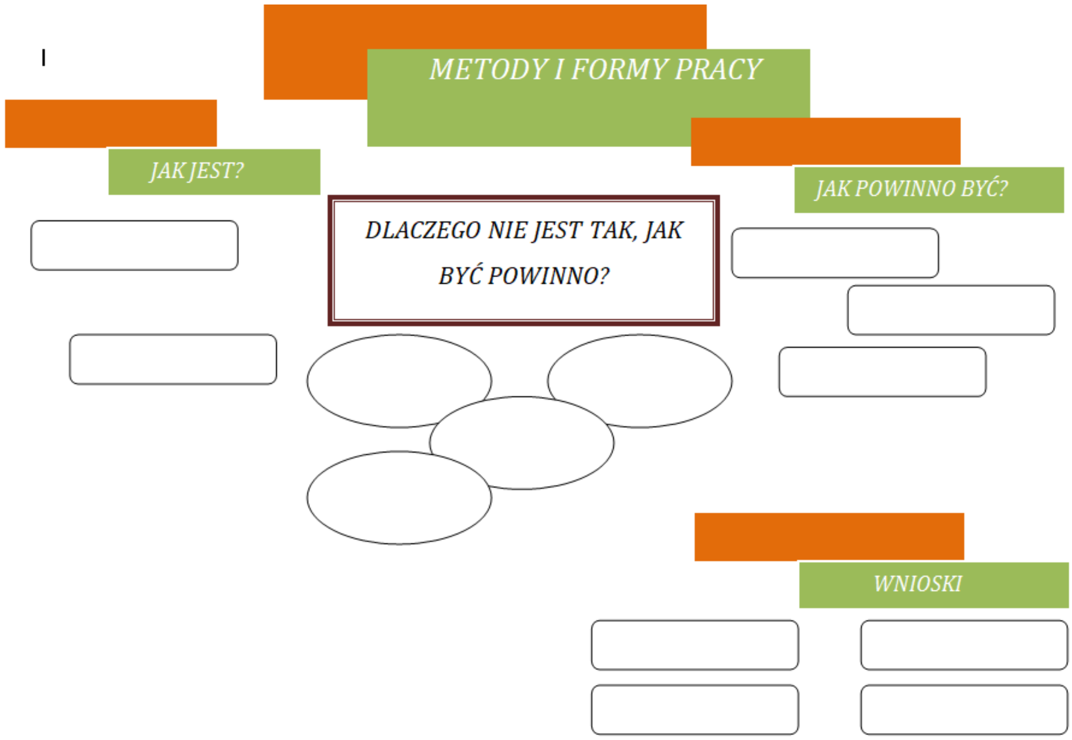
Źródło: http://www.writedesignonline.com/Prompts/Escher.html.

**W procesie uczenia się ważne są emocje i nie można dopuścić, aby były to jedynie lub w większości emocje negatywne związane z lękiem, niepewnością czy przekonaniem o swojej niedoskonałości.**

Należy pamiętać, o czym mówią teorie konstruktywistyczne, że w procesie uczenia się ważne są emocje i nie można dopuścić, aby były to jedynie lub w większości emocje negatywne związane z lękiem, niepewnością czy przekonaniem o swojej niedoskonałości. Należy stosować rożne techniki i strategie tak, aby były skuteczne zarówno dla tych, dla których nauka jest przyjemnością i tych, dla których jest przykrą koniecznością.

Teoria Tolmana i Lewina zakłada, że ludzie są zmotywowani do nauki, jeśli istnieje wymierna wartość wykładanej wiedzy (tj. spełnia ona potrzeby osobiste) oraz optymistyczne oczekiwanie sukcesu. Dlatego sukces każdego z naszych uczniów musi być „rozpisany”
w naszych planach pracy, założeniach do realizacji programów czy opracowywanych konspektach i scenariuszach.

Wydaje się, że nigdy nie jest za wcześnie, aby włączyć ucznia w proces wprowadzania zmiany, a szkoła, jako instytucja i nasza praca, jako nauczycieli, tym zmianom powinna być poddawana w sposób ciągły. Można zatem poddać stosowane przez nas metody i formy pracy ocenie uczniów. Formę takiej oceny możemy wypracować lub też skorzystać z karty zaproponowanej poniżej. Wydaje się, że taką kartę powinien wypełnić każdy uczeń indywidualnie, a później przedyskutować w małej grupie. Na koniec efekty prac grup winny być zaprezentowane na forum klasy.




**Nauczyciel powinien spróbować pomóc odkryć te dziedziny, w których uczeń wykazuje ponadprzeciętne zdolności.**

W odniesieniu do powyższych rozważań można nieco żartobliwie stwierdzić, że każdy z nas jest lokalnie genialnym matematykiem. Tezę można sformułować z użyciem pojęć z zakresu twierdzeń granicznych: „dla każdego *X* istnieje takie jego niepuste otoczenie *U*, że *X* jest najlepszym matematykiem w *U*.” Stwierdzenie to nie jest pozbawione sensu, chociaż w praktyce pracy nauczyciela należałoby je odnieść nie do matematyki jako całości, ale do jej określonych obszarów i spróbować pomóc odkryć te dziedziny, w których uczeń wykazuje ponadprzeciętne zdolności: czy to będzie tabliczka mnożenia, a może liczenie określonym sposobem, umiejętności związane z mierzeniem czy ważeniem, obliczeniami zegarowymi czy kalendarzem, czy po prostu z operowaniem pieniędzmi i zamianą nominałów. Nauczyciel powinien dać uczniowi możliwość osiągnięcia suk-cesu, odczucia satysfakcji i radości z zajmowania się matematyką.

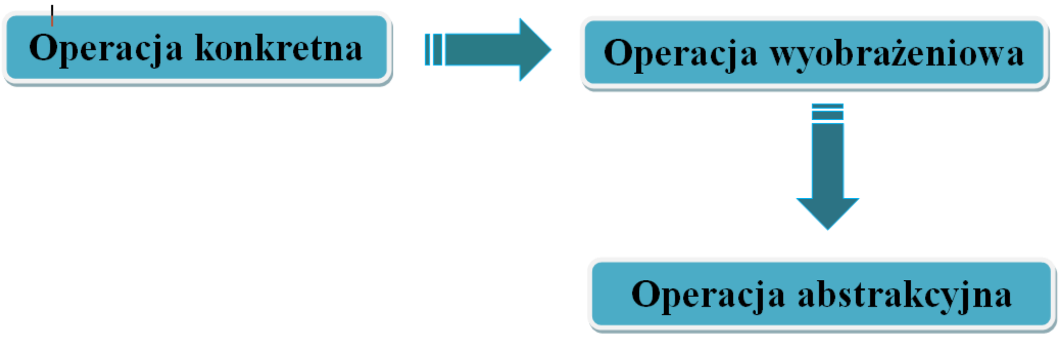
# METODY AKTYWIZUJĄCE W NAUCZANIU MATEMATYKI NIE TYLKO W SZKOLE PODSTAOWEJ

## METODA CZYNNOŚCIOWA

W klasycznej koncepcji czynnościowego nauczania matematyki prof. Zofii Krygowskiej (Krygowska, s. 127), proces dydaktyczny opiera się z jednej strony na podstawach metodologicznych matematyki jako nauki, z drugiej zaś – na psychologii procesu kształtowania się pojęć. Z. Krygowska w „Zarysie dydaktyki matematyki" charakteryzuje koncepcję czynnościowego nauczania następująco: „czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji, prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się zatem na:

1. wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu czy dowodzie,
2. świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych, mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu (…)".

Oznacza to, że nauczyciel, poprzez dobór zadań, ćwiczeń i modeli, musi stworzyć uczniowi warunki, w których będzie on mógł przebyć drogę od czynności konkretnych, poprzez wyobrażeniowe do abstrakcyjnych. Taka koncepcja jest odpowiedzią na postulat J. Piageta dotyczący wdrożenia teorii operacyjno-interioryzacyjnej.




Przywołana tutaj koncepcja prof. Krygowskiej jest zgodna z naturalną zasadą „stopniowania trudności”. Błędne jest jednak twierdzenie, że operacje abstrakcyjne zawsze muszą być trudne. Z pewnością pojęcie prostej opisuje byt abstrakcyjny (nieskończona długość, zerowa szerokość) i jego szczegółowa analiza może być trudna nawet dla ucznia szkoły kończącej się maturą. Ale już zrozumienie tego zagadnienia w taki sposób, jak rozumiał to Euklides, tj., jako obiekt, który można dowolnie przedłużać przy pomocy liniału, nie wykracza poza poziom percepcji ucznia dziewięcioletniego. Tym niemniej, w ogólności pojęcia abstrakcyjne i operowanie nimi, stanowią często wyzwanie dla ucznia i zazwyczaj dopiero użycie modelu pozwala rozpocząć efektywny proces rozwiązywania problemów o charakterze abstrakcyjnym.

Odpowiedzią praktyków na koncepcję prof. Krygowskiej było między innymi opracowanie przez H. Siwek (Siwek, s. 94) listy typów ćwiczeń realizujących omawianą problematykę:

1. Ćwiczenia „wprost", w których uczeń wykonuje proste czynności prowadzące do konstrukcji, na przykład desygnatów pojęcia.
2. Ćwiczenia odwrotne do powyższych, które wymagają wykonania czynności odwrotnej lub ciągu czynności odwrotnych do poprzednich.
3. Ćwiczenia tej samej czynności myślowej na różnych materiałach, w różnych sytuacjach, z zastosowaniem różnych zmiennych, w różnych położeniach.
4. Ćwiczenia, które prowadzą do różnych ciągów czynności o takim samym rezultacie. Istnieją różne sposoby rozwiązania, a istotny jest racjonalny wybór schematu jako najbardziej odpowiedniej i ekonomicznej drogi, która prowadzi do rozwiązania zagadnienia.
5. Ćwiczenia w słownym opisie czynności danego rodzaju: konstruowanie planów postępowania opisujących schematy czynności, prowadzących do tworzenia

przykładów definicji, zastosowania twierdzeń, tworzenia schematów sprawozdawczo-antycypacyjnych, opisywanie przedmiotu abstrakcyjnego za pomocą ciągu myślowych czynności jako wyniku czynności konkretnych i wyobrażeniowych.

6. Ćwiczenia, które prowokują konflikt myślowy takiego poziomu, że dziecko chce i może go pokonać, kontrprzykłady, skrajne przypadki, zadania z błędami uwypuklające istotne warunki definicji, założenia twierdzeń.
7. Ćwiczenia w różnych formach przedstawiania, ilustrowania albo zapisu tego samego zadania, opisy tradycyjne, drzewka.

Trzeba zauważyć, że zgodnie z koncepcją czynnościowego nauczania matematyki należy zaplanować ćwiczenia wymienionych typów na poziomie każdego z rodzaju operacji: konkretnych, wyobrażeniowych oraz abstrakcyjnych.

Poniżej zaproponowane są listy zadań kształtujących odpowiednio pojęcie podzielnika oraz figury osiowo symetrycznej w koncepcji czynnościowego nauczania.

| **Dzielniki liczby naturalnej** | | |
|---|---|---|
| **Zadania prowokujące czynności konkretne** | **Zadania prowokujące czynności wyobrażeniowe** | **Zadania prowokujące czynności abstrakcyjne** |
| Zadanie 1. Sprawdź podzielność liczby 12 przez każdą z liczb ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Podaj, ile dzielników ma liczba 12.<br><br>Zadanie 2. Rozłóż liczbę 18 na czynniki pierwsze. Sprawdź czy liczba 18 dzieli się przez każdą z liczb $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$, $2 \cdot 2$. | Zadanie 1. Rozkład liczby naturalnej *x* na czynniki pierwsze ma postać $2 \cdot 3 \cdot 5$. Rozstrzygnij czy liczba 15 jest dzielnikiem liczby *x*.<br><br>Zadanie 2. Wyznacz wszystkie dzielniki liczby 30. | Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne *x*, *y* takie, że $x \cdot y = 4$.<br><br>Zadanie 2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne *k*, *n* takie, że $(k+1) \cdot n = 3$. |

| **Figury osiowosymetryczne. Oś symetrii figury** | | |
|---|---|---|
| **Zadania prowokujące czynności konkretne** | **Zadania prowokujące czynności wyobrażeniowe** | **Zadania prowokujące czynności abstrakcyjne** |

| | | |
|---|---|---|
| Zadanie 1. Wskaż w klasie przedmioty posiadające osie symetrii. Pokaż te osie. Ile osi symetrii posiada wskazana figura?<br><br>Zadanie 2. Prostokątną kartkę od bloku zegnij na pół. Na jednej połowie namaluj domek. Obróć kartkę na drugą stronę i, nie patrząc na to co narysowałeś, spróbuj odtworzyć obrazek symetryczny do narysowanego wcześniej. Nałóż na siebie połówki i sprawdź pod światło, czy dobrze dorysowałeś drugą część rysunku. | Zadanie 1. Narysuj kilka osi symetrii oraz ponumeruj je kolejno dla różnych figur (kwadrat, trapez równoramienny, koło). Ile osi symetrii ma: kwadrat, trapez równoramienny, koło?<br><br>Zadanie 2. Narysuj wszystkie osie symetrii odcinka *AB*. Uzupełnij, wpisując wyrazy: środek, prostopadła, dwie, zawierająca.<br>Odcinek ma …………..... osie symetrii. Jedną jest prosta ............. ten odcinek. Drugą jest prosta do niego ............. i przechodząca przez .......... tego odcinka. | Zadanie 1. Ile osi symetrii ma:<br>a) punkt,<br>b) półprosta,<br>c) prosta,<br>d) figura złożona z dwóch prostych,<br>e) figura złożona z dwóch okręgów o różnych promieniach, przecinających się w dwóch punktach,<br>f) figura złożona z dwóch okręgów o równych promieniach, które nie mają punktów wspólnych,<br>g) figura złożona z dwóch okręgów współśrodkowych?<br>Każdą odpowiedź uzasadnij. |

## METODA HUERYSTYCZNA G. POLYA

W literaturze popularnonaukowej nie brak współczesnych książek o matematyce, których zarówno warstwa graficzna, jak i treść zachęcają do sięgnięcia po nie. Okazuje się jednak, że już 75 lat temu pojawiła się książka, pt. „Jak to rozwiązać?”, która może być wartościowym źródłem zarówno dla młodych adeptów matematyki, jak i nauczycieli jej uczących. Autorem publikacji jest George Polya, który stał się prekursorem heurystyki w kształceniu matematycznym. Sam termin „heurystyka" pochodzi od greckiego słowa „heurīskō” - „znajduję", które oznacza umiejętność dokonywania odkryć. Powstała wśród sofistów w starożytnej Grecji heurystyka to „sztuka dyskutowania zmierzającego do wykrycia prawdy”.

W pedagogice heurystyka to sposób organizowania nauki szkolnej polegający na naprowadzaniu uczniów na drogę samodzielnych poszukiwań i mniej lub więcej samodzielnego rozwiązywania zagadnień, wymagający aktywnej postawy ucznia i rozwijający samo-dzielność jego myślenia. George Polya, któremu zawdzięczamy zapoczątkowanie współ-czesnego nurtu badań heurystycznych, powiedział, że specyficzną właściwością intelektu jest między innymi umiejętność rozwiązywania zadań – najbardziej charakterystyczna cecha aktywności człowieka. Polya wysuwał praktyczny cel tak uprawianej dziedziny wiedzy – poprawę nauczania, a zwłaszcza nauczania matematyki. Jednocześnie upatrywał szersze niż tylko matematyczne możliwości zastosowania swoich spostrzeżeń, ale matematyczna twórczość interesowała go najbardziej (Marcińska, s. 4-6).

Według Polyi w procesie heurystycznego rozwiązywania zadań występują trzy podstawowe fazy:

**Faza obserwowania, w której uczeń:**

a) analizuje zadanie,
b) wyróżnia jego składniki,
c) stara się powiązać te składniki z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy oraz ze znanymi sposobami działania,
d) dąży do uzyskania wiążących się z zadaniem faktów.

**Faza poszukiwania (odgadywania) rozwiązania, w której uczeń dokonuje:**

a) prób syntezy rozwiązania, zestawiając plany rozwiązania i realizuje je,
b) analizy przyczyn i uwarunkowań osiągniętego postępu i popełnionych błędów,
c) uzyskania nowych środków modyfikujących sposób postępowania.

**Faza oceny (sprawdzania) rozwiązania,** w której uczeń, rozwiązując zadanie, weryfikuje wynik, ażeby przekonać się, czy spełnia warunki zadania, przy czym określenie sposobu weryfikacji może być przedmiotem odrębnego zadania.

Dokonana schematyzacja heurystycznego rozwiązywania zadań nasuwa interesujące spostrzeżenie. Można zauważyć, że stosowana w rozwiązywaniu metoda zawiera zarazem elementy mające pokrój algorytmów – np. wyróżnianie składników zadania – jak i składniki będące pewnymi racjonalizacjami metody „prób i błędów" – np. zestawianie planów rozwiązywania i takie części, jak wiązanie zadania z elementami wcześniej nagromadzonej wiedzy ze znanymi sposobami działania, których nie będziemy skłonni ani uznać za jednoznaczny „przepis" działania, ani za szczególny przypadek „próbowania i błądzenia".

Zasadniczą treścią metody Polya jest taktowne, dość subtelne podpowiadanie. Dlatego wyróżnia on uwagi dobre i złe. Te złe to zbyt konkretne, które zamiast otwierać ucznia na rysujące się możliwości, wpychają go na „jedyną słuszną" drogę do rozwiązania. Złe jest polecenie: zastosuj twierdzenie Pitagorasa. Dobre będzie odwołanie się do dotychczasowego doświadczenia i wyobraźni dziecka: *czy znasz jakieś podobne zadania?*

**Zasadniczą treścią metody Polya jest taktowne, dość subtelne podpowiadanie.**

Listę zalecanych uwag i pytań Polya rozbija na następujące cztery grupy związane z fazami rozwiązywania zadania:

1) Zrozumienie zadania. Aby uchronić przed takimi skutkami, jak: odpowiadanie na pytanie, którego nie zrozumieliśmy czy osiągnięcie celu, którego nie pragnęliśmy, Polya proponuje następujące pytania:

- Co jest niewiadome? Co jest dane? Jaki jest warunek?
- Czy warunek można spełnić? Czy wystarczy on do określenia niewiadomej?
- Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.
- Wydziel poszczególne części warunku. Czy możesz je zapisać?

„Jest dość oczywiste, że jeżeli możemy coś zapisać, narysować, odróżnimy dane od niewiadomych i potrafimy coś powiedzieć zarówno o nich jak i o łączących je warunkach – to nie grozi nam całkowite nieporozumienie odnośnie tego co i dlaczego ma być zrobione".

2) Układanie planu rozwiązania. Zalecana tutaj lista „podpowiedzi" jest bogatsza. W tym obszarze rozgrywa się najważniejsza część pracy, którą interesuje się przede wszystkim heurystyka. Oto niektóre z tych pytań:

- Może spotkałeś się już z tym zadaniem? A może z jego nieco zmienioną postacią?
- Czy znasz jakieś pokrewne zadanie? A twierdzenie, które można zastosować?
- Spójrz na niewiadomą! Spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane zadanie z tą samą niewiadomą.
- Oto znane ci pokrewne zadanie. Czy umiałbyś z niego skorzystać? A z jakiego wyniku? Metody? A po wprowadzeniu jakiegoś elementu pomocniczego?
- Czy nie mógłbyś zadania postawić inaczej? Odwołaj się do definicji.
- Rozwiąż jakieś prostsze zadanie pokrewne...
- Czy skorzystałeś ze wszystkich danych?

Jan Waszkiewicz słusznie twierdzi, iż warto zastanowić się nad tymi pytaniami i spróbować mieć je w zanadrzu na wypadek konieczności pomocy uczniom. Jednakże pamiętać trzeba, że pomoc ma być okazywana wtedy, kiedy jest pożądana i gdy rzeczywiście może być użyteczna. W każdym innym wypadku będzie ona dysfunkcjonalna.

3) Wykonanie planu. Tutaj Polya zwraca uwagę na konieczność sprawdzania każdego kroku.

4) Wreszcie na koniec winno nastąpić spojrzenie wstecz, czyli refleksja o poprawności otrzymanego wyniku, możliwości dojścia do wyniku inną drogą, czy też możliwości dalszego wykorzystania wyniku tej metody.

Nauczyciel stosujący heurystyczne metody nauczania, nie podaje uczniowi od razu faktów w gotowej formie, ale prowokuje ucznia do samodzielnego ich wyszukania czy też odkrywania. Wszystkie strategie opracowania nowego materiału z udziałem ucznia zakładają obopólną wymianę informacji między nauczycielem i uczniami oraz między samymi ucznia-mi, a więc są różnymi odmianami rozmowy. Może ona przyjmować postać stawiania pytań, kiedy nauczyciel zadaje uczniom celowo dobrane pytania, przeplatane niejednokrotnie krótkimi poleceniami lub wskazówkami, oczekując prawie jednoznacznej odpowiedzi. Do wyższych form należą pogadanka i dyskusja, które ukazują cel pracy ucznia i pomagają rozwinąć temat lekcji przy różnym, już bardziej świadomym zaangażowaniu ucznia i różnym stopniu jego samodzielności.

## „PRZEDŁUŻANIE” ZADANIA

Zdaniem E. Wittmana uczeń nie powinien zamykać książki po rozwiązaniu zadania. Zdobyte doświadczenie i wiedzę winien wykorzystać do głębszego zbadania tego problemu, do jego „przedłużenia”. Proponuje on prze-chodzić od zadań stereotypowych do zadań bardziej otwartych, stosując metodę problemów tworzących (czyli dokonując przedłużenia zadania). W jednostce dydaktycznej realizowanej według tej koncepcji wyróżnia się dwa etapy.

**Nauczyciel stosujący heurystyczne metody nauczania nie podaje uczniowi od razu faktów w gotowej formie, ale prowokuje ucznia do samodzielnego ich wyszukania czy też odkrywania.**

W pierwszym etapie prowadzący podaje tzw. zadanie wyjściowe. Uczniowie pracują pod kierunkiem nauczyciela i w razie potrzeby są przez niego kierowani, wspomagani wskazówkami, bądź pytaniami naprowadzającymi na właściwą drogę rozwiązania. W etapie drugim bardziej aktywną stroną ma być uczeń. To on ma tworzyć nowe warianty zadania na drodze analogii, uogólniania, stosowania tej samej metody do innych zadań itp. W tym etapie nauczyciel kieruje analizą sytuacji zadania wyjściowego. Prowadzi dyskusję nad tym jak osiągnięto cel, co utrudniło jego uzyskanie, co sprzyjało rozwiązaniu, w jakim kierunku może zmierzać uogólnienie zadania, jakie są możliwe zadania odwrotne, jakie znaczenie i miejsce w naszej wiedzy zajmie jego wynik itp.

Na początku są to zadania, które można rozwiązać przy pomocy wiadomości i doświadczeń metodologicznych przypomnianych i zdobytych w fazie pierwszej. Jednakże dzięki wzrostowi zaufania do swoich umiejętności, pojawiają się niebanalne pytania, mniej zamknięte i wcale nie proste. Mogą to być również takie zadania, do rozwiązania których będą potrzebne nowe wiadomości i umiejętności, zarówno wprowadzane bezpośrednio ze znanych już uczniom, jak również wymagające głębszych studiów czy chociaż poszukiwań w zasobach sieci internetowych. W tej fazie jednostki dydaktycznej udział prowadzącego zajęcia wzrasta. Ocenia on krytycznie i analizuje wspólnie z klasą pomysły i w umiejętny sposób sugeruje zastosowanie nowych koncepcji. Uczniowie mają szerokie pole do kształcenia matematycznej aktywności. Zadanie wyjściowe staje się źródłem nowych zadań na drodze uogólnienia, analogii itp. Sam wybór zadania wyjściowego nie jest bagatelny. Na początku nauki – według tej koncepcji – powinny pojawić się raczej zadania stojące „na dole" hierarchii zadań podobnych. Rozwiązywanie ich, a także tworzenie zadań nowych, zostaje ukierunkowane przede wszystkim na „małą" matematyzację konkretnej opisanej sytuacji w temacie, na formułowanie hipotez w oparciu o rozważania intuicyjne. Przez odpowiedni dobór dalszych zadań wyjściowych i właściwą metodykę organizacji procesu ich rozwiązywania kształci się i inne umiejętności takie jak chociażby formułowanie hipotez opartych na analogii, symetrii itp.

Przykładem zadań i ich przedłużeń są poniższe problemy, które mogą być rozwiązywane na etapie klas IV-VI szkoły podstawowej.

Zadanie wyjściowe: oblicz sumę liczb od 1 do 100.

Przedłużenie zadania: oblicz sumę liczb nieparzystych (parzystych) od 1 do 100.

Zadanie wyjściowe: ile jest liczb naturalnych od 1 do 87?

Przedłużenie zadania: ile jest liczb naturalnych od 23 do 87?

Zadanie wyjściowe: ile jest liczb podzielnych przez 3 wśród liczb od 1 do 33?

Przedłużenie zadania: ile jest liczb podzielnych przez 3 wśród liczb od 14 do 32?

Jedną z bardziej oczekiwanych przez nauczycieli matematyki postaw swoich uczniów jest aktywny stosunek do rozwiązywania zadań. Szczególnie interesująca jest ta forma aktywności, która wykorzystując analizę sytuacji występujących w zadaniach oraz metod ich rozwiązywania, pozwala uczniowi dostrzec i umiejętnie sformułować problemy analogiczne lub podobne. Zdobyta wiedza podczas rozwiązywania danego zadania jest wówczas w naturalny sposób wykorzystywana do pogłębienia problemu. Istotnym jest, że aktywności poznawcze, związane z „przedłużeniem” zadania czy z jego „kruszeniem”, o czym niżej, nie są tym samym, co kompetencje stanowiące zazwyczaj bazę związaną z otrzymaniem oceny szkolnej, ale mogą stanowić ważny etap w drodze rozbudzania aktywności i ciekawości poznawczej.

W realizacji tej koncepcji nauczania można generować takie sytuacje, w których dostrzega się przede wszystkim pomysły uczniów nieosiągających dotychczas sukcesów w matematyce – to ich propozycje mogą stanowić „zadania do rozwiązania”. W ten sposób, zanim dojdzie się do aktywności ogółu uczniów w procesie rozwiązywania zadań, można generować sytuacje, w których część z nich wykaże aktywność w zakresie przygotowania sytuacji problemowej.

## METODA „KRUSZENIA”

Przedstawiona niżej metoda „kruszenia” może być potraktowana jako wariant lub jako rozszerzenie opisanej wyżej koncepcji Wittmana. Metoda „kruszenia” jest jedną z nowoczesnych metod rozwiązywania zadań tekstowych (Marcińska, s. 7-8). Kruszenie w czasie rozwiązywania zadań oznacza modyfikowanie, zwiększanie lub zmniejszanie danych i ich wartości, zastępowanie danych innymi, zmianę danych, a także przekształcanie zadania, jego odwracanie, wprowadzanie nowych związków i zależności, uszczegóławianie lub uogólnianie zadania. Proces „kruszenia” rozpoczyna się zawsze od tzw. zadania bazowego, które jest najczęściej złożone, otwarte, niestandardowe i nie zawiera pytań.

Oto dwa przykłady zadań bazowych z propozycjami ich „kruszenia”:

**Zadanie bazowe 1**:

Iza znalazła 5 kasztanów i 8 żołędzi, a Karol znalazł tyle kasztanów, ile Iza razem kasztanów i żołędzi, a żołędzi o 5 mniej niż Iza.

Uczniowie mogą przedstawić treść zadania w tabeli:

| **Uczniowie** | **Liczba kasztanów** | **Liczba żołędzi** | **Razem** |
|---|---|---|---|
| **Iza** | 5 | 8 | |
| Karol | 5+8 | 8 - 5 | |
| Razem | | | |

1. Uczniowie układają pytania szczegółowe do zadania bazowego, zastanawiając się, co da się obliczyć w oparciu o przedstawione dane.

Pytania:

a) Ile kasztanów zebrał Karol?
b) Ile żołędzi zebrał Karol?
c) Ile kasztanów i żołędzi zebrała Iza?
d) Ile kasztanów i żołędzi zebrał Karol?
e) Ile kasztanów i żołędzi zebrali razem?

Na tym etapie nie stwierdzamy czy pytania są logiczne i możliwe do rozwiązania.

Ważna jest liczba ułożonych pytań. Uczniowie są zachęcani do głośnego formułowania swoich myśli. Mogą popełniać błędy, na których będą się uczyć. Każdy pomysł jest przyjmowany i zapisywany.

2. Następnie uczniowie analizują zapisane pytania i podejmują próbę ułożenia odpowiednich działań. Dopiero na tym etapie następuje ocena poprawności i logiczności pytań oraz ewentualne poprawianie błędów (w wyniku dyskusji).

3. Następnie wybrany uczeń układa treść zadania o podobnej tematyce, np.: Iza zebrała 10 kasztanów i pewną liczbę żołędzi. Karol zebrał dwa razy więcej kasztanów niż Iza i trzy razy mniej żołędzi niż Iza. Okazało się wówczas, że każde z nich ma łącznie tyle samo zebranych kasztanów i żołędzi. Ile żołędzi zebrała Iza?

**Zadanie bazowe 2**:

W pewnej klasie liczba chłopców stanowi 40 procent liczby dziewcząt. Gdyby liczba dziewcząt w klasie zmniejszyła się o 6, to w klasie pozostałoby tyle samo chłopców, co dziewcząt.

Propozycje pytań:

a) Ile jest dziewcząt w klasie?
b) Ilu jest chłopców w klasie?
c) Ilu uczniów uczęszcza do tej klasy?
d) Ilu chłopców musiałoby dołączyć do klasy, aby w klasie było tyle samo chłopców, co dziewcząt?

Oczywiście katalog pytań jest otwarty, a często największą wartość dydaktyczną będą miały takie pytania, na które przy podanych danych nie da się znaleźć odpowiedzi.

Historia nauki zna wiele przykładów błędnych teorii, które przez całe lata wyznaczały kierunki jej „rozwoju". Błędy i szukanie rozwiązań zagadnień nieistotnych są udziałem nawet laureatów nagrody Nobla. Wśród nich warto wymienić profesora Andre Geima, będącego jedynym bodajże naukowcem, który otrzymał nagrodę Nobla za prace nad grafenem, a jednocześnie został „uhonorowany" anty-Noblem za eksperymenty z lewitującą żabą. Ale, jeśli błędy mogą popełniać najlepsi, to pozwalajmy na błędy naszym uczniom.

Co więcej, nie reagujmy natychmiast, gdy je dostrzeżemy – pozwólmy prowadzić uczniom rozumowanie i dochodzić do wyników, które staną się podstawą do formułowania pytań o prawdziwość/poprawność rozwiązania. W pierwszej kolejności szansę na dostrzeżenie błędu winien mieć uczeń rozwiązujący/referujący, ale w kolejnych chwilach taką szansę będzie miał cały zespół uczniowski.

Nie unikajmy stwierdzeń, że błądzenie jest okazją do powstawania wartościowych sytuacji poznawczych. Błąd jest okazją, aby pogłębić analizę postawionego problemu. Wówczas popełnienie błędu nie będzie traktowane jako porażka edukacyjna, co mogłoby stać się źródłem lęku przed matematyką

## ROZWIJANIE INTELIGENCJI LOGICZNO-MATEMATYCZNEJ PRZEZ ZABAWĘ

**Ideałem byłoby takie zorganizowanie procesu dydaktycznego, aby jak najbardziej przypominał zabawę.**

Błędem jest założenie, nieobce także nauczycielom tzw. „starej daty", że wraz z zakończeniem etapu tzw. kształcenia zintegrowanego i wejściem na poziom nauczania przedmiotowego, nieodwołalnie kończy się etap zabawy w trakcie lekcji. Tymczasem, jeśli przez zabawę rozumiemy spontaniczne, przyjemne spędzanie czasu wolnego, do którego chce się wracać, ideałem byłoby takie zorganizowanie procesu dydaktycznego, aby jak najbardziej przypominał zabawę.

Oczywiście formy zabawy można i należy dostosować do celu, jaki chcemy osiągnąć oraz do wieku ucznia. Można sięgnąć do gotowych gier planszowych, aplikacji komputerowych czy gier/pomocy przygotowanych samodzielnie przez uczniów. Warto byłoby, przygotowując rozkłady materiału, przewidzieć w nich jednostki lekcyjne przeznaczone na zabawę, a z całą pewnością warto wykorzystywać tę formę kształcenia w trakcie tzw. zastępstw. Zwalnia to bowiem nauczyciela z konieczności dokonania swoistej diagnozy dotyczącej opanowanych już umiejętności i pozwala wzbudzić aktywność ogółu uczniów, także tych, którzy nie potrafili na wcześniejszych lekcjach osiągnąć sukcesu.

Zabawą, która w niezwykły sposób rozwija inteligencję logiczno-matematyczną jest szyfrowanie. Istotne jest, że można do niej wracać wielokrotnie, na różnych poziomach i przy wykorzystaniu różnych narzędzi – niekiedy wystarczy tylko kartka i długopis, innym razem można przygotować prosty dekoder liniowy (do szyfru Cezara), zdjęcie z klawiaturą telefonu komórkowego, czy „prawdziwą maszynę szyfrującą”.

Najprostszą zabawą, od której można zacząć, jest zapisanie zakodowanej wiadomości poprzez ciąg liczb, np.:

**18 – 24 – 23 – 6 – 17**

Najprawdopodobniej szybko znajdzie się ktoś, kto zaproponuje, aby pod liczby wstawić odpowiadające im litery w alfabecie, co pozwoli dokonać deszyfrażu wiadomości:

**18 – 24 – 23 – 6 – 17**
**s – z – y – f – r**

Można zaproponować szyfr zwany „komórkowym”, od klawiatury telefonu.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 ABC | 3 DEF |
| 4 GHI | 5 JKL | 6 MNO |
| 7 PQRS | 8 TUV | 9 WXYZ |
| | 0 | |

Biuro projektu: **Ogólnopolski Operator Oświaty**
ul. Jana Gorczyczewskiego 2/7; 60-554 Poznań
tel. 61 843 63 04; mail: biuro@operator.edu.pl

Wówczas, po podaniu wiadomości, że kluczem kodowym (maszyną kodową) jest klawiatura telefonu komórkowego, nasze kodowane słowo może mieć postać trudniejszą do odczytania:

**7 – 9 – 9 – 3 – 7**

lub łatwiejszą, np.:

**7777 – 9999 – 999 – 333 – 777**

albo:

$$\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{3}{3}+\frac{3}{7}$$

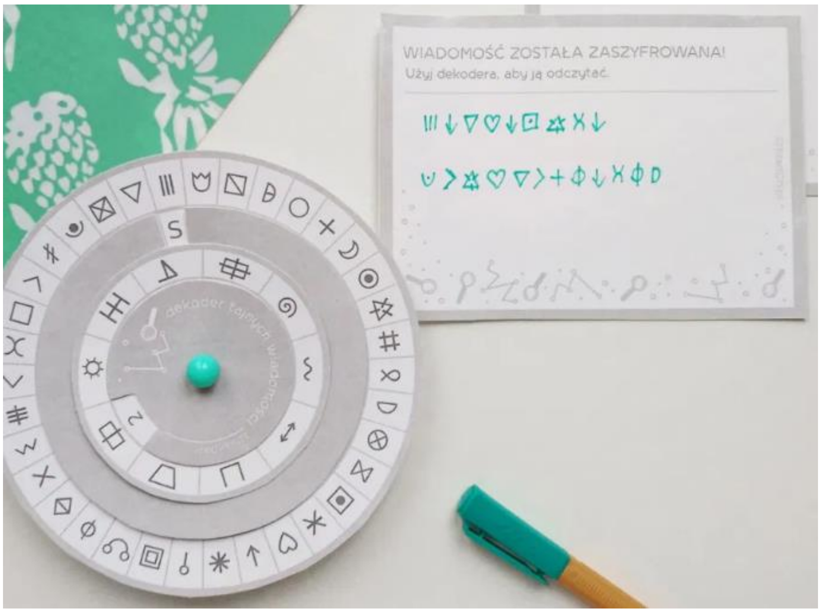
Można także zaproponować zabawę z szyfrem Cezara – dobrze byłoby tę lekcję wcześniej zaplanować i poprosić, aby uczniowie znaleźli w Internecie informację o takich szyfrach, a później, aby odkodowali zapisane słowo. Na początku długość cyklu przesunięcia można uczniom podać, ale już w kolejnym podejściu można zobowiązać uczniów, aby tę długość wyznaczyli – poprzez metodę prób i błędów. Dla cyklu równego 3 kodowane przez nas słowo będzie miało postać:

**WCBIU**

Widać to na dołączonym przyrządzie kodowym, który może składać się z dwóch pasków papieru, na których zapisane są kolejne litery alfabetu i które można przesuwać względem siebie – oczywiście pozostaje rozstrzygnąć czy  w zapisie alfabetu zapisujemy tradycyjne znaki alfabetu łacińskiego, czy polskie znaki diakrytyczne.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o | p | r | s | t | u | w | x | y | z |
| d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o | p | r | s | t | u | w | x | y | z | a | b | c |

Teraz byłaby pora na włączenie uczniów do tworzenia swoich szyfrów. Myślę, że warto zaproponować im sięgnięcie do zasobów Internetu, aby tam odkryli takie, które ich zafascynują. Ale można ich oczywiście zachęcić do stworzenia swoich zasad szyfrowania oraz narzędzi do ich kodowania.




Źródło: https://321startdiy.pl/szyfrowanie-wiadomosci-zabawa-dla-dzieci/.

# CO ROBIĆ NA LEKCJACH MATEMATYKI W „CZASIE WOLNYM”?

Sformułowane w tytule pytanie jest oczywiście prowokacyjne. Jako nauczyciele matematyki na każdym etapie edukacyjnym mamy świadomość, że liczba godzin kształcenia matematyki w całym cyklu nauczania jest niewystarczająca i dlatego nie mamy czasu na rozbudzanie zainteresowań i „bawienie się” matematyką, co mogłoby być odpowiedzią na naturalną ciekawość poznawczą ucznia w każdym wieku. Ale często nauczyciele szkół ponadpodstawowych z pewnym zdziwieniem zauważają, że absolwenci rozpoczynający u nich szkolną przygodę, są często „nauczeni” zagadnień, które zapisane są w podstawie programowej dla szkół kończących się maturą. Dotyczy to często wzorów skróconego mnożenia, równań z wartością bezwzględną czy elementów trygonometrii.

Przyczyną jest (był przed pandemią) kalendarz roku szkolnego, w którym egzamin dla uczniów klas VIII odbywał się w kwietniu, a rok szkolny trwał niemal do końca czerwca. Z założenia czas ten był przeznaczony na realizację zagadnień, które w komentarzu do podstawy programowej są opisane jako nie podlegające weryfikacji w zadaniach egzaminacyjnych, zgodnie z zapisami rozporządzenia: „działy XIV–XVII podstawy programowej dla klas VII i VIII mogą zostać zrealizowane po egzaminie ósmoklasisty”. W praktyce szkolnej jednak wielu nauczycieli kończy realizację przyjętego programu przed egzaminem i po nim „nie ma co robić”. Po egzaminie następuje wspomniany w podtytule „czas wolny”.

Nie sposób nie przywołać w tym miejscu moich szkolnych doświadczeń. W szkole podstawowej poznałem trygonometrię, wzory skróconego mnożenia (zarówno dla drugiej, jak i dla trzeciej potęgi), układy równań liniowych. Z kolei w liceum nauczyłem się całkować, rozwiązywać równania różniczkowe oraz poznałem pojęcia podstawowych struktur algebraicznych: grup czy pierścieni. Nie poddaję pod dyskusję zagadnienia czy wtedy było lepiej, chciałbym jednak przywołać trudności, na jakie dzisiaj trafi nauczyciel liceum czy technikum, który na początku cyklu kształcenia wprowadza nowe pojęcia – jak się okazuje –

znane np. połowie uczniów. Zadaniem nauczyciela jest ocenić stopień opanowania nowych treści, ale ta ocena jest w sposób naturalny zaburzona, gdy nie dla wszystkich uczniów są one rzeczy-wiście czymś nowym. Gdyby jeszcze uczniowie „znający" to pojęcie zechcieli włączyć się aktywnie w proces dydaktyczny, a nie komentować, że „jest to proste", „my to już robiliśmy", „moja pani robiła to inaczej" – zresztą samo komentowanie, niekiedy denerwujące nauczy-ciela, może nie być wystarczającą przesłanką do sformułowania apelu: nie realizujcie na siłę treści programowych z następnego etapu edukacyjnego. Tym zasadniczym powodem jest „wyłączanie się" znacznej części uczniów, którzy dane zagadnienie już wcześniej w szkole poznali, często związane z fałszywym przekonaniem, że „to już umiem". Późniejsza weryfikacja na sprawdzianie może być wówczas przykrą niespodzianką. A przecież można sięgnąć po „ciekawe zadania", których ogromne zasoby znaleźć można na internetowych stronach Olimpiady Matematycznej Juniorów, na stronie Kangura Matematycznego czy wreszcie na polskojęzycznych stronach badania PISA. Wówczas w oparciu o znane treści, własności i twierdzenia można rozwijać kompetencje matematyczne, kompetencje jako pewną postawę oderwaną od bieżących zagadnień, ale związaną z poprawnością wnioskowania, logicznym myśleniem, właściwym używaniem argumentów i podawaniem kontrprzykładów. Tytułowy „czas wolny" można bardzo dobrze spożytkować.

Dobrze jest wówczas sięgnąć na przykład do klasycznych anegdot jak chociażby tej o młodym Karolu Fryderyku Gaussie, którego nauczyciel, podobnie jak i pozostałych uczniów, poprosił o obliczenie sumy wszystkich liczb naturalnych od 1 aż do 10000. Gdy po kilku minutach uczeń podał wynik, nauczyciel miał zareagować nerwowo, bo oczekiwał, że praca ta zajmie cały dzień. Dzisiaj ten klasyczny problem uczeń szkoły ponadpodstawowej rozwiąże, wykorzystując aparat pojęciowy związany z ciągiem arytmetycznym, ale dla dziesięciolatka, a tyle lat miał podobno wówczas Gauss, i wtedy, i dzisiaj jest to wyzwanie o charakterze niemal fizycznym czyli wymagającym mozolnej, ciężkiej pracy, choć rachunkowej.

Przypomnijmy pomysł przypisywany Gaussowi:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 4998 & + & 4999 & + & 5000 \\
10000 & + & 9999 & + & 9998 & + & \cdots & + & 5003 & + & 5002 & + & 5001 \\
\hline
10001 & + & 10001 & + & 10001 & + & \cdots & + & 10001 & + & 10001 & + & 10001
\end{array}$$

Odpowiednie pogrupowanie liczb od 1 do 5000, a następnie od 5001 do 10000 i ich zapisanie odpowiednio jedna pod drugą, pozwala te pary liczb zsumować do 10001 – takich par jest 5000, zatem pozostaje odpowiednio te liczby wymnożyć, aby uzyskać wynik.

$$\begin{array}{r} 10001 \\ \underline{x \qquad 5000} \\ 50\,005\,000 \end{array}$$

Cóż, wydaje się, że przytoczona historia jest jednak anegdotą, bo trudno oczekiwać od uczniów efektywnego zsumowania liczb aż do takiego rzędu.

Ten „gaussowski" algorytm można oczywiście powtórzyć i uogólnić np. dla liczb parzystych, dla kolejnych liczb, które nie muszą zaczynać się od 1 czy dla liczb, które zachowują pewną regularność – np. są podzielne przez 3.

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ \underline{2n + (2n-1) + (2n-2) + \cdots + (n+3) + (n+2) + (n+1)} \\ (2n+1) + (2n+1) + (2n+1) + \cdots + (2n+1) + (2n+1) + (2n+1) \end{array}$$

Powyższe zapisy pozwalają podać wzór:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2n = n \cdot (2n+1)$$

Analogicznie:

$$\begin{array}{l} 3 + 6 + \cdots + 3(n-2) + 3(n-1) + 3n \\ \underline{3(n+n) + 3\big(n + (n-1)\big) + \cdots + 3(n+3) + 3(n+2) + 3(n+1)} \\ (6n+3) + (6n+3) + \cdots + (6n+3) + (6n+3) + (6n+3) \end{array}$$

Stąd parzystą ilość liczb podzielnych przez trzy można opisać wzorem:

$$3+6+9+\cdots+3(n+n)=3n\cdot(2n+1)$$

Podobnie:

$$\begin{array}{cccccccccc}
4 & + & 8 & + \cdots + & 4(n-2) & + & 4(n-1) & + & 4n \\
4(n+n) & + & 4\big(n+(n-1)\big) & + \cdots + & 4(n+3) & + & 4(n+2) & + & 4(n+1) \\
\hline
(8n+4) & + & (8n+4) & + \cdots + & (8n+4) & + & (8n+4) & + & (8n+4)
\end{array}$$

Stąd parzystą ilość liczb podzielnych przez cztery można opisać wzorem:

$$4+8+12+\cdots+4(n+n)=n\cdot(8n+4)$$

Ale można także sformułować pytanie dotyczące sumowania nieparzystej ilości takich liczb – wówczas nie da się „ładnie” podzielić na dwie równoliczne grupy. Ale z pewnością ten problem, po przeanalizowaniu przykładów wcześniejszych, można uczniom zaproponować do samodzielnego rozwiązania.

Podobnych zagadnień jest wiele. Mogą dotyczyć zapisywania ułamków łańcuchowych czy też liczenia sum ułamków, których mianowniki są iloczynami liczb różniących się np. o 1.

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{2019\cdot 2020}+\frac{1}{2020\cdot 2021}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2021}=\frac{2019}{4042}$$

Zachęcam nauczycieli do szukania takich interesujących problemów, których wiele można znaleźć także w dostępnych podręcznikach (najczęściej w formie ciekawostek, uwag typu „warto wiedzieć”, itp.). Ich analiza i wspólne rozwiązywanie przez uczniów, nawet w formie projektów edukacyjnych (choć już nie w formie obowiązkowej), z pewnością może rozwijać kompetencje matematyczne uwolnione od encyklopedycznej wiedzy. A zagadnienia związane z podstawą programową liceum czy technikum warto chyba pominąć, o co w imieniu nauczycieli liceów i techników, proszę.

# BIBLIOGRA


- Krygowska Z.: Zarys dydaktyki matematyki, cz. I. WSiP, Warszawa 1977.
- Marcińska B.: Metody aktywizujące w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej, https://www.profesor.pl/publikacja,13816,Artykuly,Metody-aktywizujace-w-nauczaniu-matematyki-w-szkole-podstawowej, (dostęp: 21.09.2021).
- Polya G.: Jak to rozwiązać, PWN, Warszawa 2009.
- Siwek H.: Czynnościowe nauczanie matematyki, WSiP, Warszawa 1998.
- ZALECENIE RADY z dnia 22 maja 2018 roku w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie (Tekst mający znaczenie dla EOG) (2018/C 189/01).